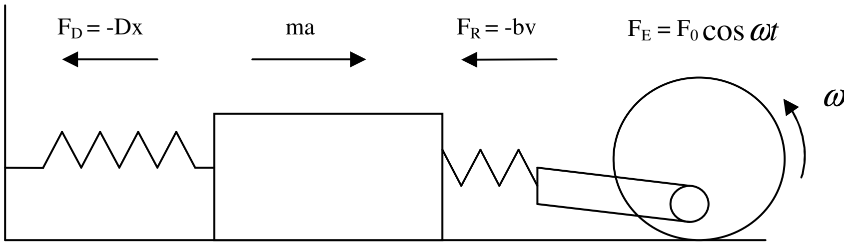
SW 24

Für ein zu erzwungenen Schwingungen in x-Richtung angeregtes System berechne man die im Zeitmittel übertragene Energie $\overline{W} = \overline{W_{kin}} + \overline{W_{pot}}$. Für welche Frequenz ω der äußeren Kraft lässt sich im Zeitmittel die meiste Energie auf das System übertragen? Man diskutiere die Energieverhältnisse (kinetische Energie, potentielle Energie, durch die Reibung aufgezehrte Energie) und vergleiche mit den Fällen der freien Schwingung mit und ohne Dämpfung.



Kräftegesetz:

$m \cdot a = -Dx - bv + F_0 \cos \omega t$

$\Rightarrow x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ (S.30, Tafel 59)

$\dot{x} = \frac{-f_0 \cdot \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Kinetische Energie: $W_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$\Rightarrow W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot \frac{mf_0^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \cdot \sin^2(\omega t + \varphi)$

Potentielle Energie: $W_{pot} = \frac{1}{2}Dx^2$, mit $D = m\omega_0^2$ $\Rightarrow W_{pot} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$

$\Rightarrow W_{pot} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_0^2\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \cdot \cos^2(\omega t + \varphi)$

Mittelwert von $\sin^2$ und $\cos^2$ ergibt sich zu $\frac{1}{2}$, da diese Funktionen zwischen 0 und 1 schwingen (Bem: $(-1)^2 = 1$).
Somit ergibt sich für das Zeitmittel der Energien:

$\overline{W} = \overline{W_{pot}} + \overline{W_{kin}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{f_0^2\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{f_0^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$

$$\Rightarrow \overline{W} = \frac{1}{4} \cdot \frac{f_0^2(\omega_0^2 + \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

Berechnung der Frequenz ω für größte Energieübertragung:

Differenzieren der Funktion; Bedingung: $\frac{d\overline{W}}{d\omega} = 0$

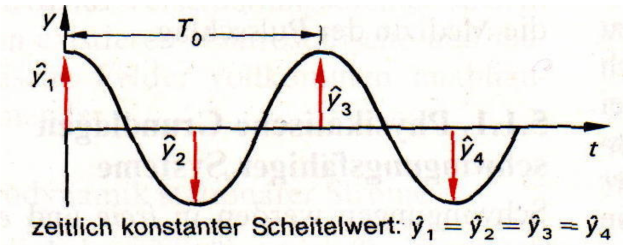
$$\frac{d\overline{W}}{d\omega} = \frac{1}{2} m f_0^{\,2} \omega \frac{(\omega_0^{\,4} - 2\omega_0^{\,2}\omega^2 + \omega^4 + 4\beta^2\omega^2) - (-2\omega_0^{\,4} - 2\omega_0^{\,2}\omega^2 + 2\omega_0^{\,2}\omega^2 + 2\omega^4 + 4\beta^2\omega_0^{\,2} + 4\beta^2\omega^2)}{((\omega_0^{\,2} - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega^4 + 2\omega_0^{\,2}\omega^2 + \omega_0^{\,4} = 3\omega_0^{\,4} - 4\beta^2\omega_0^{\,2} + \omega_0^{\,4}$$

$$\Leftrightarrow (\omega^2 + \omega_0^{\,2})^2 = 4\omega_0^{\,4} - 4\beta^2\omega_0^{\,2}$$

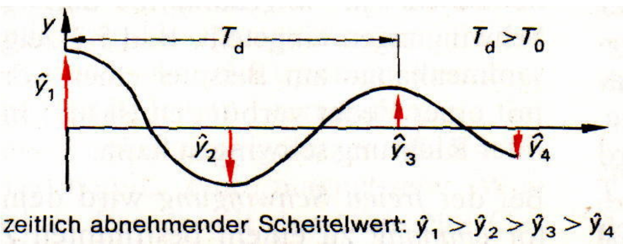
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\omega = \sqrt{\sqrt{4\omega_0^{\,4} - 4\beta^2\omega_0^{\,2}} - \omega_0^{\,2}}}}$$

<u>Freie ungedämpfte Schwingung</u>



⇨ keine Reibung

<u>Freie gedämpte Schwingung</u>



=> $k = \frac{\hat{y}_1}{\hat{y}_3}$ ist das Dämpfungsverhältnis