SW1) Ein Kreiszylindrisches Rohr vom Außenradius r_o ist einseitig durch einen ebenen Boden abgeschlossen. Es wird durch ein eingelegtes Gewicht beschwert, so dass die Gesamtmasse des beschwerten Rohres m_{ges} ist; es schwimmt daher bei geeigneter Länge L mit Vertikaler Achse auf der Oberfläche einer zunächst unendlich ausgedehnten Flüssigkeit der Dichte ρ.

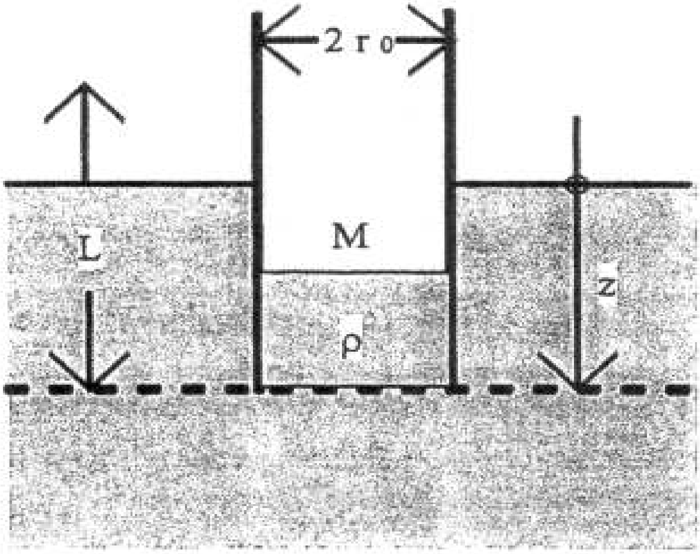

Abb.1

a) Wie groß ist der Gleichgewichtswert z_0 der Tiefe z des Rohrbodens unter dem Flüssigkeitsspiegel? Welche Ungleichung muss also l erfüllen, damit das Rohr schwimmt?

Grundbedingung für den Schwimmvorgang:
- Die Gewichtskraft muss gleich der Auftriebskraft sein.

$$F_g = F_a$$

mit $F_g = m \cdot g \quad \wedge \quad F_a = \rho \cdot g \cdot V_k'$

folgt:

$$m \cdot g = \rho \cdot g \cdot V_k' \quad (1)$$

F_g: Gewichtskraft
F_a: Auftriebskraft
m: Masse
g: Erdbeschleunigung
ρ: Dichte des Körpers
V_k': Körpervolumen unter Wasser

Volumen eines Zylinders:

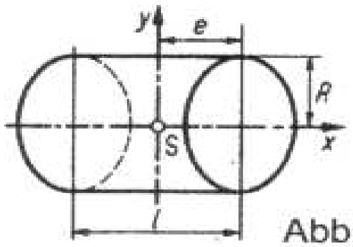

Abb.2

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot l$$

mit R = r_0 und l = z_0 folgt:

$$V_k' = \pi \cdot r_0^2 \cdot z_0 \quad (2)$$

Z_0: Länge des Zylinders unter Wasser, in der der Zylinder im Gleichgewicht bleibt.

Mit Gleichung (1) und (2) folgt:

$$m \cdot g = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot z_0$$

Damit gilt für z_0: $$\underline{\underline{z_0 = \frac{m}{\rho \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2}}}} \quad (3)$$

Damit das Rohr mit vertikaler Achse auf der Oberfläche schwimmen kann, muss also L größer oder gleich z_0 sein:

$$L \geq z_0$$

$$\underline{\underline{L \geq \frac{m}{\rho \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2}}}} \quad (4)$$

b) Bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω_0 vertikaler Schwingungen in die Ruhelage (dämpfungsfrei). Dazu bestimmen Sie jedoch zuerst die vertikal nach unten wirkende Gesamtkraft F_Z als Funktion der Abweichung $u = z - z_0$ von der Ruhelage und formulieren Sie damit die Bewegungsgleichung, um ω_0 zu erhalten.

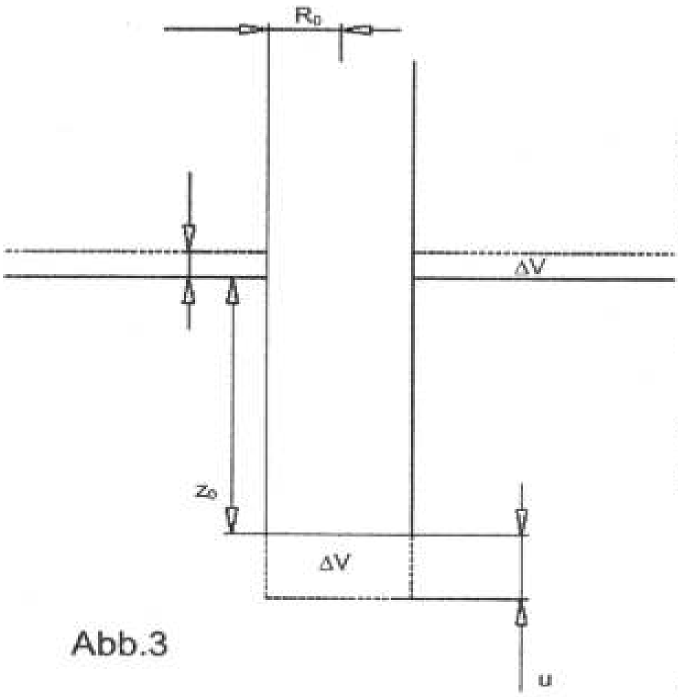

Abb.3

$$F_Z = F_g - F_a \ ,$$

da F_a einmal aus der verdrängten Wassermenge in der Ruhelage und dem nach der Auslenkung besteht gilt:

$$F_a = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot z_0 + \rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot u$$

wobei u die Auslenkung in vertikaler Richtung darstellt (siehe Abb.3).

Damit folgt für F_Z:

$$F_Z = m \cdot g - \rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot z_0 - \rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot u$$

, da $m \cdot g = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot z_0$ folgt:

$$F_Z = -\rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot u$$

Die allgemeine Formel für die Rücktreibende Kraft F_r zeigt durch Betrachtung der mathematischen Struktur folgendes:

$$F_r = -D \cdot s$$

$$F_Z = -\rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot u$$

F_r: Rücktreibende Kraft
D: Richtgröße
s: Auslenkung

Daraus folgt:

$$D = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \quad (5)$$

Mit Gleichung (5) und der allgemeinen Formel für die Kreisfrequenz ω_0 (6) folgt:

ω_0: Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \qquad (6)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2}}{m}}$$

c) Bestimmen Sie die Schwingungsperiode T_0 in Wasser für m = 1kg und r_0 = 1cm

Aus $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ (allgemeine Formel) und $\rho_{Wasser} = 10^3 \frac{kg}{m^3}$ folgt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1 \cdot kg}{10^3 \cdot kg \cdot m^{-3} \cdot 9{,}81 \cdot m \cdot s^{-2} \cdot \pi \cdot 10^{-4} \cdot m^2}} = \underline{\underline{3{,}58 \cdot s}}$$

d) Welche Kreisfrequenz ω_1 ergibt sich, wenn das Rohr koaxial in einem kreiszylindrischen Gefäß vom Radius r_1 schwimmt? Dazu überlegen Sie zunächst, um welche Höhe ξ der Flüssigkeitsspiegel angehoben wird, wenn das Rohr um u absinkt; berechnen Sie dann den Auftrieb und schließlich ω_1.

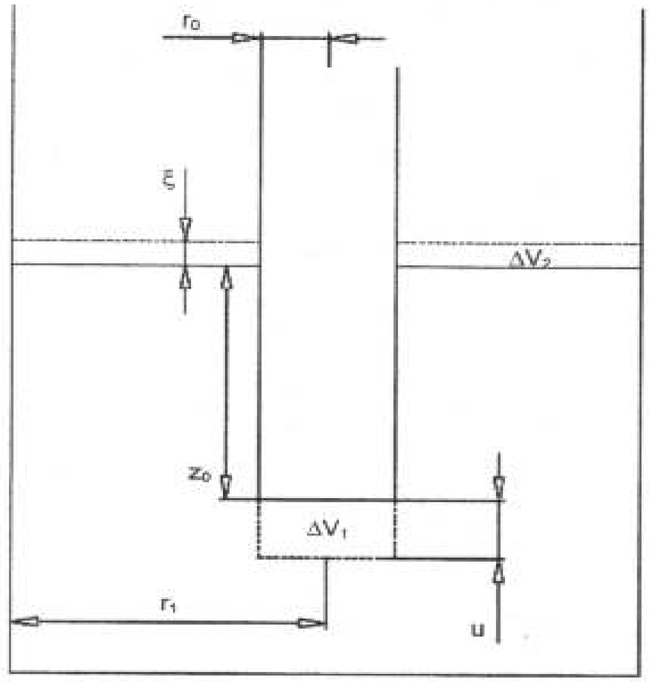

Abb.4

Das vom Rohr unten verdrängte Volumen ist gleich dem Volumen, um das der Wasserspiegel steigt:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2$$

Mit $\Delta V_1 = \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot u$ und

$\Delta V_2 = \pi \cdot (r_1 - r_0)^2 \cdot \xi$ folgt:

$$\cancel{\pi} \cdot r_0^{\ 2} \cdot u = \cancel{\pi} \cdot (r_1 - r_0)^2 \cdot \xi$$

$$r_0^{\ 2} \cdot u = (r_1 - r_0)^2 \cdot \xi$$

$$\xi = \frac{r_0^{\ 2} \cdot u}{(r_1 - r_0)^2}$$

$$F_Z{}' = F_g - F_a = m \cdot g - \rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot (z_0 + u + \xi)$$

$$F_Z{}' = \underbrace{m \cdot g - \rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot z_0}_{=0} - \rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot u - \rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot \xi)$$

$$F_Z{}' = -\rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot u - \rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot \xi)$$

$F_Z{}' = -\rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot (u + \xi)$ mit $\xi = \frac{r_0^{\ 2} \cdot u}{(r_1 - r_0)^2}$ folgt:

$F_Z{}' = -\rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot \left(u + \frac{r_0^{\ 2} \cdot u}{(r_1 - r_0)^2}\right)$, mit der Annahme: $F_Z{}' = m \cdot a$

$$m \cdot a = -\rho \cdot g \cdot \pi \cdot r_0^{\ 2} \cdot \left(u + \frac{r_0^{\ 2} \cdot u}{(r_1 - r_0)^2}\right)$$

$$a = \frac{-\rho \cdot g \cdot \pi \cdot {r_0}^2 \cdot \left(u + \frac{{r_0}^2 \cdot u}{(r_1 - r_0)^2} \right)}{m} \quad \text{mit} \quad {\omega_0}^2 = \frac{\rho \cdot g \cdot \pi \cdot {r_0}^2}{m} \quad \text{folgt}$$

$$a = -{\omega_0}^2 \left(u + \frac{{r_0}^2 \cdot u}{(r_1 - r_0)^2} \right) \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{a}{u} \quad \text{folgt:}$$

$$\underline{\underline{{\omega_1}^2 = -{\omega_0}^2 \left(u + \frac{{r_0}^2 \cdot u}{(r_1 - r_0)^2} \right) \cdot u^{-1}}}$$