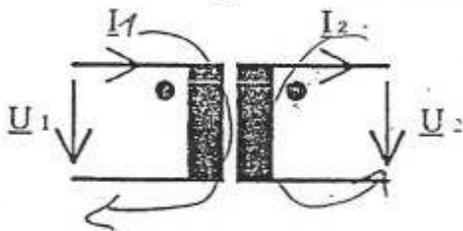


Die meisten Aufgaben dieses Typs können auf zwei verschiedene Arten gelöst werden. Bei der ersten Methode werden die Ströme durch Bildung von Maschenumläufen der Primär- und Sekundärseite berechnet. Das Umwandeln des Schaltbildes in ein Ersatzschaltbild ist die zweite Methode zur Transformatorberechnung

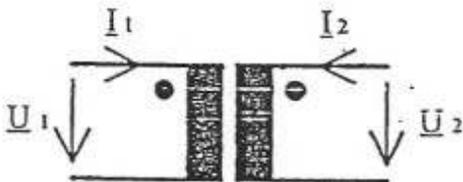
1. Berechnung der Transformatorschaltung über Maschenumläufe

Zuerst müssen die Maschengleichungen von der Primärseite und der Sekundärseite des Trafos aufgestellt werden. Die Spule der Primär- oder Sekundärseite des Trafos wird bei dem Maschenumlauf wie eine Induktivität behandelt. Jedoch muß man beim Aufstellen dieser Gleichungen beachten, daß die stromdurchflossene Spule der anderen Trafoseite eine zusätzliche Spannung in der betrachteten Spule hervorruft. Ob diese Spannung in der Maschengleichung addiert oder subtrahiert wird, hängt von der Richtung des Stromflusses in der Primär- und Sekundärseite, sowie von dem Wicklungssinn des Trafos ab. (Wenn sich die durch die Ströme erzeugten Flüsse addieren, addieren sich auch die durch die Flüsse induzierten Spannungen.)

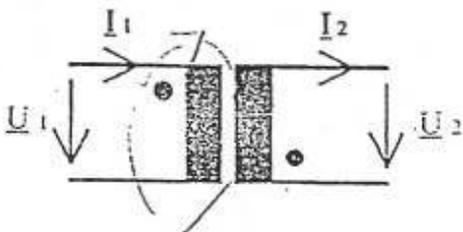
Folgende Aufstellung kann als Vorzeichenregel für die Maschengleichungen einer Transformatorberechnung benutzt werden.



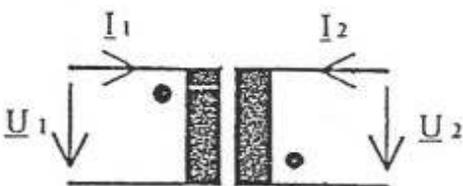
$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= +I_1 j\omega L_1 - I_2 j\omega M \\ \underline{U}_2 &= +I_1 j\omega M - I_2 j\omega L_2 - \underline{U}_2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= +I_1 j\omega L_1 + I_2 j\omega M \\ \underline{U}_2 &= +I_1 j\omega M + I_2 j\omega L_2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= +I_1 j\omega L_1 + I_2 j\omega M - \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 &= -I_1 j\omega M - I_2 j\omega L_2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= +I_1 j\omega L_1 - I_2 j\omega M \\ \underline{U}_2 &= -I_1 j\omega M - I_2 j\omega L_2 \end{aligned}$$

Allgemein:

Fließen beide Ströme über die gekennzeichneten Klemmen in die Spulen hinein, so addieren sich die Flüsse. Fließt ein Strom über die gekennzeichnete Klemme hinein, der andere heraus, dann subtrahieren sich die Flüsse und damit die Spannungen. Das absolute Vorzeichen ergibt sich je nach gewähltem Umlaufsinn.

Mit den Maschengleichungen lassen sich nun die Ströme berechnen.

Die weitere Berechnung der Aufgaben erfolgt unter der Annahme, daß am Trafo keine Streuung vorhanden ist. Dann nämlich gilt für die Induktivitäten und Gegeninduktivitäten folgende Regeln.

$$L_1 L_2 = M^2; \quad L_1 = n_1^2 \Lambda; \quad L_2 = n_2^2 \Lambda; \quad M = n_1 n_2 \Lambda$$

Für den magnetischen Leitwert des Eisens gilt: $\Lambda = \frac{\mu_0 \mu_r A}{l}$

In den Aufgaben wird öfters angegeben, daß ein ideales Eisen angenommen wird. Dies bedeutet, daß die Permeabilitätszahl μ_r unendlich groß ist. Wenn aber die Permeabilitätszahl einen Wert gegen Unendlich annimmt, so strebt der Wert des magnetischen Leitwertes des Eisens, der Induktivitäten und Gegeninduktivitäten auch gegen Unendlich.

$$\mu_r \rightarrow \infty \Rightarrow \Lambda = \frac{\mu_0 \mu_r A}{l} \rightarrow \infty \Rightarrow$$

$$L_1 = n_1^2 \Lambda \rightarrow \infty; \quad L_2 = n_2^2 \Lambda \rightarrow \infty; \quad M = n_1 n_2 \Lambda \rightarrow \infty$$

Beim Quotienten zweier Induktivitäten kürzen sich die unendlichen Leitwerte heraus.

$$\Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2}; \quad \frac{M}{L_1} = \frac{n_2}{n_1}; \quad \frac{M}{L_2} = \frac{n_1}{n_2}; \dots$$

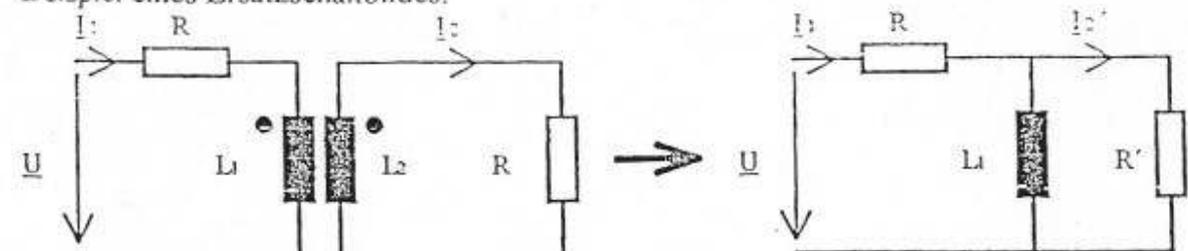
Mit diesen vereinfachten Bedingungen ist das Berechnen der Aufgaben möglich.

2. Berechnung der Transformatorschaltung über das Ersatzschaltbild

Hierbei wird der Trafo nur durch die Induktivität der Primärseite ersetzt. Die Strom-, Spannungs- und Widerstandswerte der Sekundärseite werden nach folgenden Regeln umgerechnet:

$$\underline{U}_2' = \frac{n_1}{n_2} \underline{U}_2; \quad \underline{I}_2' = \frac{n_2}{n_1} \underline{I}_2; \quad R' = \frac{n_1^2}{n_2^2} R$$

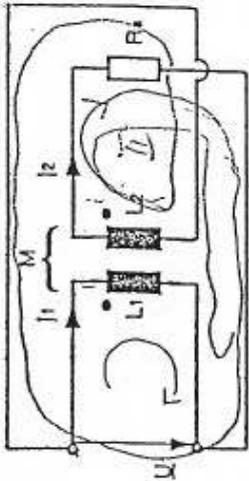
Beispiel eines Ersatzschaltbildes:



Nun können die geforderten Strom-, Spannungs- und Widerstandswerte errechnet werden.

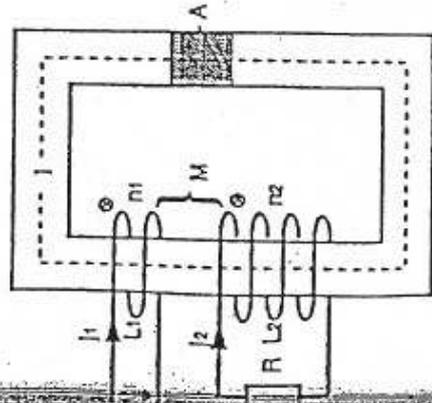
Ferner ist meistens angegeben, daß die Permeabilitätszahl einen unendlichen Wert annimmt. Wenn dies der Fall ist, nimmt auch die Induktivität L_1 einen Wert gegen unendlich an. Eine weitere Berechnung der Aufgabe ist jetzt sehr einfach, da das Ersatzschaltbild nur noch aus einer Schaltung von mehreren ohmschen Widerständen besteht.

Aufgabe 3



- a) Berechnen Sie die Ströme I_1 und I_2 .
- b) Vereinfachen Sie die Stromgleichungen für I_1 und I_2 unter den Annahmen:
- keine Streuung $\rightarrow L_1 L_2 = M^2$
 - ideales Eisen, d.h. $\mu_r \rightarrow \infty$
- c) Berechnen Sie die Ströme I_1 und I_2 unter diesen Annahmen für die Werte $U_1 = 100\text{ V}$, $R_1 = 60\ \Omega$, $n_1 = 3000$, $n_2 = 1000$

Gegeben ein Transformator mit nachstehenden Werten:

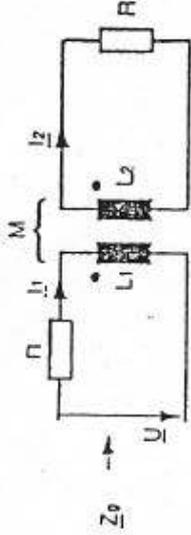


Keine Eisenverluste
Keine Kupferverluste
Keine Streuung

- $n_1 = 300$
- $n_2 = 100$
- $l = 30\text{ cm}$
- $A = 10\text{ cm}^2$
- $\mu_{\text{eff}} = 4 \cdot 10^3\text{ Vs/Am}$

$U_1 = 220\text{ V}$; $f = 50\text{ Hz}$; $R_1 = 20\ \Omega$

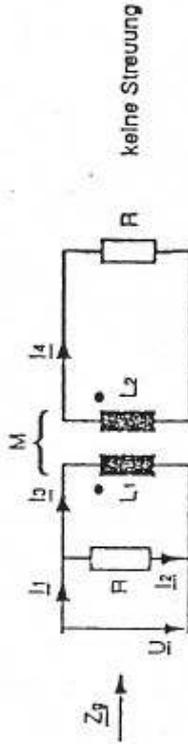
Berechnen Sie die Ströme I_1 und I_2 nach Betrag und Phasenlage.
Berechnen Sie die Spannung U_2 nach Betrag und Phasenlage.



keine Streuung

- a) Berechnen Sie den Eingangswiderstand Z_g der Transformatorschaltung.
- b) Vereinfachen Sie den Ausdruck unter der Annahme $\mu_r \rightarrow \infty$.

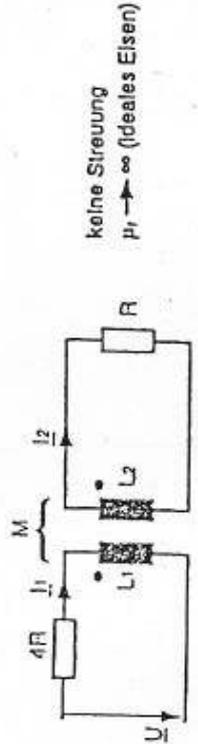
Red. 4)



keine Streuung

- a) Berechnen Sie den Eingangswiderstand Z_g der vorstehenden Schaltung.
- b) Vereinfachen Sie das Ergebnis aus a) unter der Annahme $\mu_r \rightarrow \infty$.

Red. 5)



keine Streuung
 $\mu_r \rightarrow \infty$ (ideales Eisen)

a) Berechnen Sie den Strom I_2

Lösungen der Transformatoraufgaben

Aufgabe 1)

a)

$$I_2 j\omega L_2 + \bar{I}_2 R_a$$

1. Masche: $I_1 j\omega L_1 - j\omega M I_2 = \underline{U}_1$ 2. Masche: $-I_1 j\omega M + (j\omega L_2 + R_a) I_2 = \underline{U}_1$

$$\underline{D} = \begin{vmatrix} j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & (j\omega L_2 + R_a) \end{vmatrix} = -\omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2 + j\omega L_1 R_a$$

$$\underline{D}_1 = \begin{vmatrix} \underline{U}_1 & -j\omega M \\ \underline{U}_1 & (j\omega L_2 + R_a) \end{vmatrix} = \underline{U}_1 (j\omega L_2 + R_a + j\omega M) = \underline{U}_1 [R_a + j\omega(L_2 + M)]$$

$$\underline{D}_2 = \begin{vmatrix} j\omega L_1 & \underline{U}_1 \\ -j\omega M & \underline{U}_1 \end{vmatrix} = \underline{U}_1 j\omega(L_1 + M)$$

$$I_1 = \frac{\underline{D}_1}{\underline{D}} = \underline{U}_1 \frac{R_a + j\omega(L_2 + M)}{\omega^2(M^2 - L_1 L_2) + j\omega L_1 R_a} \quad ; \quad I_2 = \frac{\underline{D}_2}{\underline{D}} = \underline{U}_1 \frac{j\omega(L_1 + M)}{\omega^2(M^2 - L_1 L_2) + j\omega L_1 R_a}$$

b)

$$L_1 L_2 = M^2 \quad ; \quad \mu_r \rightarrow \infty \Rightarrow \Lambda = \frac{\mu_0 \mu_r A}{l} \rightarrow \infty \quad (\Lambda = \text{magnetischer Leitwert des Eisens})$$

$$L_1 = n_1^2 \Lambda \quad L_2 = n_2^2 \Lambda \quad M = n_1 n_2 \Lambda$$

$$I_1 = \underline{U}_1 \frac{R_a + j\omega(L_2 + M)}{\omega^2(M^2 - L_1 L_2) + j\omega L_1 R_a} \quad ; \quad M^2 - L_1 L_2 = 0 \Rightarrow I_1 = \underline{U}_1 \frac{R_a + j\omega(L_2 + M)}{j\omega L_1 R_a}$$

$$\frac{R_a}{j\omega L_1 R_a} = \frac{1}{j\omega L_1} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{\underline{U}_1 (L_2 + M)}{R_a L_1} = \underline{U}_1 \frac{\Lambda(n_2^2 + n_1 n_2)}{R_a n_1^2 \Lambda} = \frac{\underline{U}_1}{R_a} \left[\frac{n_2^2}{n_1^2} + \frac{n_2}{n_1} \right]$$

$$I_1 = \frac{\underline{U}_1}{R_a} \cdot \frac{n_2}{n_1} \left[1 + \frac{n_2}{n_1} \right]$$

$$I_2 = \underline{U}_1 \frac{j\omega(L_1 + M)}{\omega^2(M^2 - L_1 L_2) + j\omega L_1 R_a} \Rightarrow I_2 = \underline{U}_1 \frac{j\omega(L_1 + M)}{j\omega L_1 R_a} = \frac{\underline{U}_1 (L_1 + M)}{L_1 R_a} = \frac{\underline{U}_1 (n_1^2 + n_1 n_2)}{R_a n_1^2}$$

$$I_2 = \frac{\underline{U}_1}{R_a} \left[1 + \frac{n_2}{n_1} \right]$$

c)

$$\underline{U}_1 = 100\text{V}; R_a = 60\Omega; n_1 = 3000; n_2 = 1000$$

$$I_1 = \frac{\underline{U}_1}{R_a} \cdot \frac{n_2}{n_1} \left[1 + \frac{n_2}{n_1} \right] = \frac{\underline{U}_1}{R_a} \cdot \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{3} \right] = \frac{100\text{V}}{60\Omega} \cdot \frac{4}{9} = \frac{100}{135} \text{A} = 0,741\text{A}$$

Aufgabe 2)

a)

keine Streuung $\rightarrow L_1 L_2 = M^2$; $L_1 = n_1^2 \Lambda$; $L_2 = n_2^2 \Lambda$; $M = n_1 n_2 \Lambda$

Für die eingezeichneten Stromrichtungen addieren sich die Flüsse, also addieren sich auch die von ihnen erzeugten Spannungen.

1. Masche : $\underline{U}_1 = \underline{I}_1 j\omega L_1 + \underline{I}_2 j\omega M$

2. Masche : $0 = \underline{I}_2 R + \underline{I}_2 j\omega L_2 + \underline{I}_1 j\omega M = \underline{I}_1 j\omega M + \underline{I}_2 (R + j\omega L_2)$

$$\underline{D} = \begin{vmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 + R \end{vmatrix} = j\omega L_1 R - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2 = j\omega L_1 R$$

$$\underline{D}_1 = \begin{vmatrix} \underline{U}_1 & j\omega M \\ 0 & j\omega L_2 + R \end{vmatrix} = \underline{U}_1 (R + j\omega L_2)$$

$$\underline{D}_2 = \begin{vmatrix} j\omega L_1 & \underline{U}_1 \\ j\omega M & 0 \end{vmatrix} = -j\omega M \underline{U}_1$$

$L_1 = n_1^2 \Lambda$

$M = n_1 \cdot n_2 \cdot \Lambda$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{D}_1}{\underline{D}} = \frac{\underline{U}_1 (R + j\omega L_2)}{j\omega L_1 R} = \frac{\underline{U}_1}{j\omega L_1} + \frac{\underline{U}_1 L_2}{L_1 R} ; \underline{I}_2 = \frac{\underline{D}_2}{\underline{D}} = -\frac{j\omega M \underline{U}_1}{j\omega L_1 R} = -\frac{M \underline{U}_1}{L_1 R}$$

$$\Lambda = \frac{\mu_0 \mu_r A}{l} ; \omega = 2\pi f \Rightarrow$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1 n_2^2}{R n_1^2} - j \frac{\underline{U}_1}{\omega L_1} = \frac{\underline{U}_1 n_2^2}{R n_1^2} - j \frac{\underline{U}_1 l}{2\pi f \mu_0 \mu_r A} \Rightarrow \underline{I}_1 = \frac{220V}{20\Omega} \cdot \frac{1}{9} - j \frac{220V \cdot 30cm}{2 \cdot \pi \cdot 50Hz \cdot 4 \cdot 10^{-3} \frac{Vs}{Am} \cdot 10cm^2}$$

$$\underline{I}_1 = (1,222 - j0,584)A = 1,35Ae^{-25,54^\circ}$$

n_1^2 fehlt

$$\underline{I}_2 = -\frac{\underline{U}_1 n_1 n_2 \Lambda}{R n_1^2 \Lambda} = -\frac{\underline{U}_1 n_2}{R n_1} \Rightarrow \underline{I}_2 = -\frac{220V \cdot 1}{20\Omega \cdot 3}$$

$$\underline{I}_2 = -3,6A = 3,6Ae^{180^\circ}$$

$\frac{\underline{U}_1}{j\omega L_1}$

$-j \frac{\underline{U}_1}{\omega L_1}$

b)

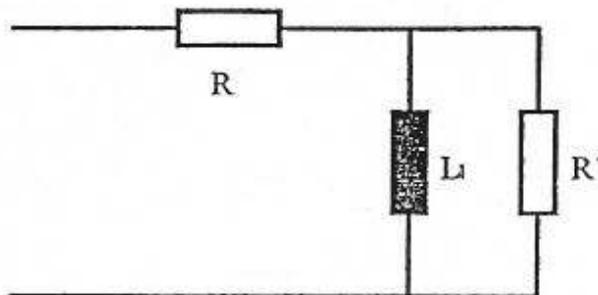
$$\underline{U}_2 = -R \underline{I}_2 = -R \left(-\frac{\underline{U}_1 n_2}{R n_1} \right) = \underline{U}_1 \frac{n_2}{n_1}$$

$$\underline{U}_2 = 220V = 73,3V = 73,3V e^{0^\circ}$$

Aufgabe 3)

a)

Ersatzschaltbild :



$$L_1 = n_1^2 \Lambda \quad ; \quad L_2 = n_2^2 \Lambda \quad ; \quad R' = \frac{n_1^2}{n_2^2} \cdot R$$

$$\underline{Z}_g = R + \frac{j\omega L_1 R'}{j\omega L_1 + R'} = R + \frac{j\omega L_1 \frac{n_1^2}{n_2^2} R}{j\omega n_1^2 \Lambda + \frac{n_1^2}{n_2^2} R} = R + \frac{j\omega L_1 R}{j\omega n_2^2 \Lambda + R} = R + \frac{j\omega L_1 R}{j\omega L_2 + R}$$

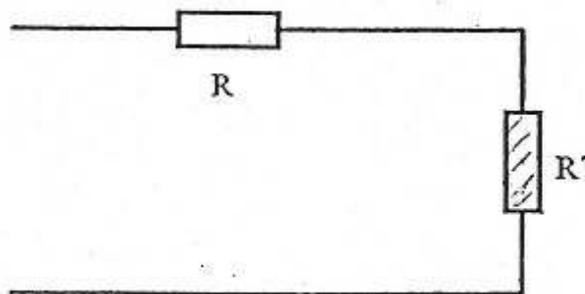
$$\underline{Z}_g = R \cdot \left(1 + \frac{j\omega L_1}{j\omega L_2 + R}\right)$$

$\frac{n_1^2}{n_2^2}$ $\frac{n_2^2}{n_1^2}$

b)

$$\mu_r \rightarrow \infty \Rightarrow \Lambda = \frac{\mu_0 \mu_r A}{l} \rightarrow \infty \Rightarrow L_1 = n_1^2 \Lambda \rightarrow \infty$$

Ersatzschaltbild :



$$\underline{Z}_g = R + R' = R + R \frac{n_1^2}{n_2^2} \quad \underline{Z}_g = R \cdot \left(1 + \frac{n_1^2}{n_2^2}\right)$$

Alternativ gibt es auch die Möglichkeit mit dem Ergebnis aus a) weiterzurechnen.

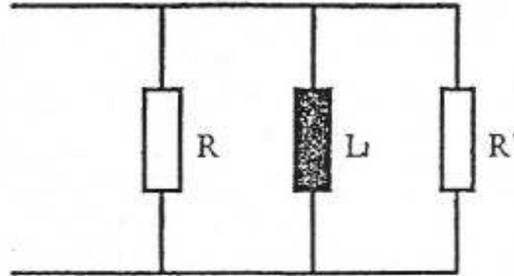
$$\underline{Z}_g = R \cdot \left(1 + \frac{j\omega L_1}{j\omega L_2 + R}\right) = R \cdot \left(1 + \frac{j\omega n_1^2 \Lambda}{j\omega n_2^2 \Lambda + R}\right) = R \cdot \left(1 + \frac{j\omega n_1^2}{j\omega n_2^2 + \frac{R}{\Lambda}}\right) \quad ; \quad \frac{R}{\Lambda} \rightarrow 0$$

$$\underline{Z}_g = R \cdot \left(1 + \frac{j\omega n_1^2}{j\omega n_2^2}\right) = R \cdot \left(1 + \frac{n_1^2}{n_2^2}\right)$$

Aufgabe 4)

a)

Ersatzschaltbild:



$$\frac{210}{X} = 1.1$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = 1.963$$

$$\frac{6.7 + 5.7 + 5.6}{2.10}$$

$$R' = \frac{n_1^2}{n_2^2} R \quad ; \quad L_1 = n_1^2 \Lambda \quad ; \quad L_2 = n_2^2 \Lambda$$

$$\underline{Y}_s = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{n_2^2}{n_1^2 R} = \frac{n_1^2 R + j\omega L_1(n_1^2 + n_2^2)}{R n_1^2 j\omega L_1} = n_1^2 \Omega + j\omega L_1 n_1^2 + j\omega L_1 n_2^2$$

$$\underline{Z}_s = \frac{1}{\underline{Y}_s} = \frac{R n_1^2 j\omega L_1}{n_1^2 R + j\omega L_1(n_1^2 + n_2^2)} = \frac{R j\omega L_1}{R + j\omega L_1(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2})} = \frac{R j\omega L_1}{R + j\omega L_1 + j\omega n_1^2 \Lambda \frac{n_2^2}{n_1^2}}$$

$$\underline{Z}_s = \frac{R j\omega L_1}{R + j\omega(L_1 + L_2)}$$

b)

$$\mu \rightarrow \infty \Rightarrow \Lambda = \frac{\mu_1 \mu_0 A}{l} \rightarrow \infty \Rightarrow L = n^2 \Lambda \rightarrow \infty$$

\Rightarrow Das Ersatzschaltbild besteht in diesem Fall nur noch aus einer Parallelschaltung von R und R'.

$$\underline{Z}_s = \frac{R \cdot R'}{R + R'} = \frac{R \frac{n_1^2}{n_2^2} R}{R + \frac{n_1^2}{n_2^2} R}$$

$$\underline{Z}_s = \frac{R}{1 + \frac{n_2^2}{n_1^2}}$$

Aufgabe 5)

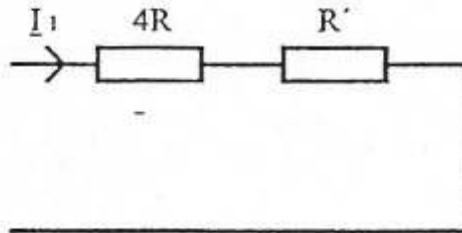
a)

$$\mu_r \rightarrow \infty \Rightarrow \Lambda = \frac{\mu_0 \mu_r A}{l} \rightarrow \infty \Rightarrow L = n^2 \Lambda \rightarrow \infty$$

\Rightarrow Das Ersatzschaltbild besteht aus einer Reihenschaltung von $4R$ und R' .

\Rightarrow Da nur eine Reihenschaltung vorliegt, ist I_2' genauso groß wie I_1 .

Ersatzschaltbild :



$$I_2' = I_1 ; I_2' = \frac{n_2}{n_1} I_2 ; R' = \frac{n_1^2}{n_2^2} R$$

$$I_2' = \frac{U}{4R + R'} = \frac{U}{4R + \frac{n_1^2}{n_2^2} R} = \frac{U}{R(4 + \frac{n_1^2}{n_2^2})}$$

$$I_2 = \frac{n_1}{n_2} I_2' = \frac{U \frac{n_1}{n_2}}{4R + \frac{n_1^2}{n_2^2} R} = \frac{U}{R(4 \frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2})}$$

b)

Im Widerstand R wird die größte Leistung umgesetzt wenn R' den gleichen Wert hat wie $4R$.
(Anpassung)

$$R' = 4R$$

$$\frac{n_1^2}{n_2^2} R = 4R$$

$$\frac{n_1}{n_2} = 2$$

Induktivität:

$$X_L = j\omega \cdot L = \frac{U}{I}$$

$$\varphi_i = \varphi_u - \pi/2 \quad \Rightarrow \text{Strom eilt der Spannung um } \pi/2 \text{ nach}$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \pi/2$$

Kapazität:

$$X_C = \frac{1}{j\omega \cdot C} = \frac{U}{I}$$

$$\varphi_i = \varphi_u + \pi/2 \quad \Rightarrow \text{Strom eilt der Spannung um } \pi/2 \text{ voraus}$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\pi/2$$

Komplexe Rechnung:

karthesische Form: $\underline{C} = A + jB = \text{Re} + j\text{Im}$

Exponentialform:

$$\underline{C} = C \cdot e^{j\gamma}$$

$$C = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\gamma = \arctan(\text{Im}/\text{Re}) = \arctan(B/A)$$

=> **Vorsicht:** Einfache Taschenrechner liefern nur Ergebnis der Phase im 1. und 4. Quadranten

Eulersche Formel: $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$

Umwandlungen:

=> von karthesischer Form in die Exponentialform:

$$\underline{C} = 3 - j4$$

$$C = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\gamma = \arctan(-4/3) = 306,87^\circ - 180^\circ = 127^\circ$$

$$\underline{C} = 5 \cdot e^{j127^\circ}$$

=====

$$\underline{C} = 3 - j4 = 5 \cdot (\cos 127^\circ + j \sin 127^\circ)$$

$$\underline{C} = 5 \cdot e^{j127^\circ}$$

=====

=> von Exponentialform in karthesische Form:

$$\underline{C} = 4 \cdot e^{j20^\circ} = 4 \cdot (\cos 20^\circ + j \sin 20^\circ)$$

$$\underline{C} = 3,76 + j1,37$$

=====

Grundrechenarten:

1) Summe-Differenz:

$$\underline{A} = A_1 + jA_2$$

$$\underline{B} = B_1 + jB_2$$

$$\underline{A} + \underline{B} = (A_1 + B_1) + j(B_2 + B_2)$$

2) Produkt: => am beste in Exponentialform umwandeln

$$\underline{A} = A_1 + jA_2 = A \cdot e^{j\alpha}$$

$$\underline{B} = B_1 + jB_2 = B \cdot e^{j\beta}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A \cdot e^{j\alpha} \cdot B \cdot e^{j\beta} = A \cdot B \cdot e^{j(\alpha+\beta)}$$

3) konjugiert komplex Erweitern: => mit konjugiert komplexen Ausdruck erweitern, um Nenner reell zu machen.

$$\frac{1}{A_1 + jA_2} \cdot \frac{A_1 - jA_2}{A_1 - jA_2} = \frac{A_1 - jA_2}{A_1^2 + A_2^2} = \frac{A_1}{A_1^2 + A_2^2} - j \cdot \frac{A_2}{A_1^2 + A_2^2}$$

$$= \text{Re} + j \text{Im}$$

=====

4) Quotient: => am besten in Exponentialform umwandeln

$$\underline{A} = A_1 + jA_2 = A \cdot e^{j\alpha}$$

$$\underline{B} = B_1 + jB_2 = B \cdot e^{j\beta}$$

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{A \cdot e^{j\alpha}}{B \cdot e^{j\beta}} = \frac{A}{B} \cdot e^{j(\alpha-\beta)}$$

=====

5) imaginäre Einheit

$$j^0 = +1$$

$$j^1 = +j$$

$$j^2 = -1$$

$$j^3 = -j$$

$$j^4 = +1$$

$$j^{-1} = -j$$

$$j^{-2} = +j$$

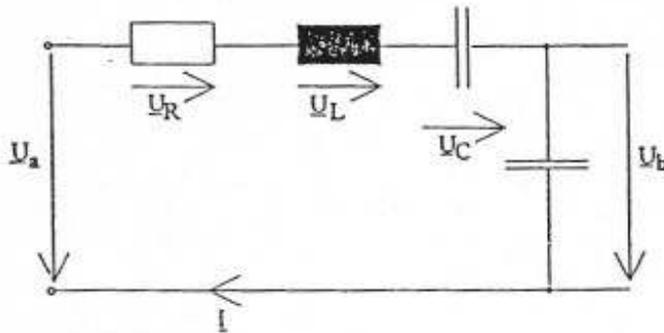
$$j^{-3} = -1$$

$$j^{-4} = +1$$

$$j = e^{j\pi/2}$$

$$-j = e^{j3\pi/2} = e^{-j\pi/2}$$

Aufg.2)



a) Bei welcher Kreisfrequenz besteht zwischen \underline{U}_a und \underline{U}_b eine Phasenverschiebung von 90° ?

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_b} = \frac{R + j(X_L - 2 \cdot X_C)}{-jX_C} \Rightarrow \text{konjugiert komplex erweitern}$$

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_b} = \frac{R + j(X_L - 2 \cdot X_C)}{-jX_C} \cdot \frac{jX_C}{jX_C} = \frac{jRX_C - X_C(X_L - 2X_C)}{X_C^2} = \frac{2X_C^2 - X_C X_L + jRX_C}{X_C^2}$$

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_b} = \frac{jRX_C - X_C(X_L - 2X_C)}{X_C^2} = \frac{2X_C^2 - X_C X_L + jRX_C}{X_C^2}$$

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_b} = \frac{2X_C - X_L + jR}{X_C} = \frac{2X_C - X_L}{X_C} + j \cdot \frac{R}{X_C}$$

$$\varphi = 90^\circ \Rightarrow \tan \varphi = \frac{\text{Im}}{\text{Re}}$$

$$\tan 90^\circ \Rightarrow \text{Realteil(Re)} = 0$$

$$\frac{2X_C - X_L}{X_C} = 0$$

$$2X_C - X_L = 0$$

$$X_C = \frac{X_L}{2}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}; \omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$\frac{X_L}{2} = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$\omega = \frac{2}{\omega \cdot L \cdot C}; X_L = \omega \cdot L$$

$$\omega^2 = \frac{2}{L \cdot C} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2}{L \cdot C}}$$

=====

b) Berechnen Sie für diese Frequenz den Gesamtwiderstand der Schaltung.

$$Z_s = R + j(X_L - 2X_C)$$

$$X_L = 2X_C$$

$$Z_s = R + j(2X_C - 2X_C)$$

$$Z_s = R$$

=====

c) Berechnen Sie den Strom \underline{I} und die Spannungen $\underline{U}_R, \underline{U}_L, \underline{U}_C$ und \underline{U}_b für diese Frequenz.

$$\underline{I} = \frac{U_a}{R}$$

$$\underline{U}_R = \underline{I} \cdot R = U_a$$

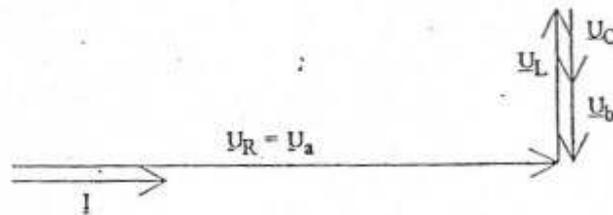
$$\underline{U}_L = \underline{I} \cdot jX_L = j \cdot \frac{U_a}{R} \cdot \sqrt{\frac{2L}{C}}$$

$$\underline{U}_C = \underline{I} \cdot (-jX_C) = -j \cdot \frac{U_a}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{2C}} = -\frac{\underline{U}_L}{2}$$

$$\underline{U}_b = \underline{I} \cdot X_C = \underline{U}_C \text{ falsch}$$

d) Zeichnen Sie das Zeigerbild aller Größen für $U_a = 80V; R = 8k\Omega; L = 2H; C = 10^{-6}F$ (maßstäblich)

$$10V = 1cm$$



$$\underline{I} = \frac{U_a}{Z_s} = \frac{80V \cdot e^{j0^\circ}}{8000\Omega \cdot e^{j0^\circ}} = 10mA \cdot e^{j0^\circ}$$

$$\underline{U}_R = \underline{I} \cdot R = 10mA \cdot e^{j0^\circ} \cdot 8000\Omega \cdot e^{j0^\circ} = 80V$$

$$\underline{U}_L = \underline{I} \cdot X_L = 10mA \cdot e^{j0^\circ} \cdot 2000\Omega \cdot e^{j90^\circ} = 20V \cdot e^{j90^\circ}$$

$$\underline{U}_C = \underline{I} \cdot X_C = 10mA \cdot e^{j0^\circ} \cdot 1000\Omega \cdot e^{-j90^\circ} = 10V \cdot e^{-j90^\circ}$$

$$\underline{U}_b = \underline{I} \cdot X_C = \underline{U}_C = 10V \cdot e^{-j90^\circ}$$

c)

$$\underline{I} = \frac{U_a}{R}$$

$$\underline{U}_R = \underline{I} R = \frac{U_a}{R} \cdot R = U_a$$

$$\underline{U}_L = \underline{I} \cdot jX_L = \frac{U_a}{R} \cdot j\omega L = \frac{U_a}{R} \cdot j \sqrt{\frac{2}{LC}} L = \frac{U_a}{R} \cdot j \sqrt{\frac{2L}{C}}$$

$$\underline{U}_C = -\underline{I} \cdot jX_C = -\frac{U_a}{R} \cdot j \sqrt{\frac{1}{LC}} C = -\frac{U_a}{R} \cdot j \sqrt{\frac{L}{2C}}$$

$$\underline{U}_B = \underline{U}_C$$

d) Zeigerbild

Aufgabe 2:

$$\frac{U}{\underline{I}_2} = \frac{U}{\underline{I}_1} e^{j30^\circ}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_3 + \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{jX_L}{R + jX_{L2}} = \underline{I}_1 \frac{jX_L (R - jX_{L2})}{R^2 + X_{L2}^2} = \underline{I}_1 \frac{jRX_L + X_{L2}^2}{R^2 + X_{L2}^2}$$

$$= \frac{\underline{I}_1 X_{L2}^2}{R^2 + X_{L2}^2} + j \frac{RX_{L2} \underline{I}_1}{R^2 + X_{L2}^2}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{Z}$$

$$Z = jX_{L1} - jX_C + R \parallel jX_{L2}$$

$$= jX_{L1} - jX_C + \frac{RjX_{L2}}{R + jX_{L2}}$$

$$= jX_{L1} - jX_C + \frac{RjX_{L2} (R - jX_{L2})}{R^2 + X_{L2}^2}$$

$$= jX_{L1} - jX_C + \frac{jR^2 X_{L2} + RX_{L2}^2}{R^2 + X_{L2}^2}$$

$$= jX_{L1} - jX_C + j \frac{R^2 X_{L2}}{R^2 + X_{L2}^2} + \frac{RX_{L2}^2}{R^2 + X_{L2}^2}$$

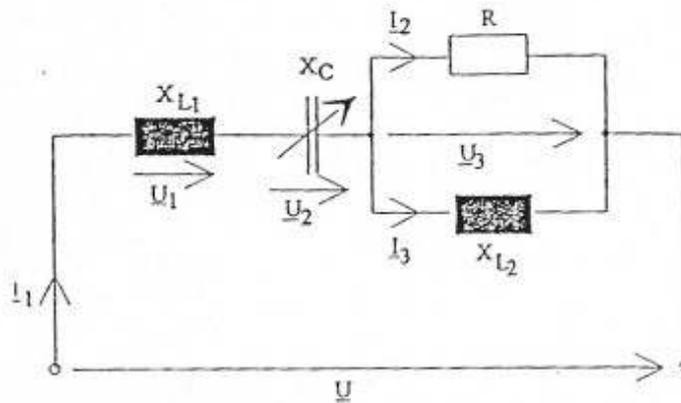
$$\frac{\underline{I}_1}{U} = \frac{RX_{L2}^2}{R^2 + X_{L2}^2} + j \left(X_{L1} - X_C + \frac{R^2 X_{L2}}{R^2 + X_{L2}^2} \right)$$

$$\underline{I}_2 = \left[\frac{RX_{L2}^2}{R^2 + X_{L2}^2} + j \left(X_{L1} - X_C + \frac{R^2 X_{L2}}{R^2 + X_{L2}^2} \right) \right] \cdot \frac{jX_L}{R + jX_{L2}}$$

$$\frac{U}{\underline{I}_2} = \left[\frac{RX_{L2}^2}{R^2 + X_{L2}^2} + j \left(X_{L1} - X_C + \frac{R^2 X_{L2}}{R^2 + X_{L2}^2} \right) \right] \cdot (R + jX_{L2}) \cdot (-j)$$

$$\begin{aligned}
\frac{U}{I_2} &= \left[\frac{R X_{L2}^2}{R^2 + X_{L2}^2} + j \left(X_{L1} X_C + \frac{R^2 X_{L2}}{R^2 + X_{L2}^2} \right) \right] \frac{-jR + X_{L2}}{X_{L2}} \\
&= \frac{R X_{L2}^2}{R^2 + X_{L2}^2} \cdot \frac{-jR + X_{L2}}{X_{L2}} - \left(j X_{L1} - j X_C + \frac{R^2 X_{L2}}{R^2 + X_{L2}^2} \right) \frac{jR + X_{L2}}{X_{L2}} \\
&= \frac{-jR^2 X_{L2}^2 + R X_{L2}^3}{R^2 X_{L2} + X_{L2}^3} - \left(-\frac{R X_{L1} + j X_{L1} X_{L2}}{X_{L2}} + \frac{X_C R - j X_C X_{L2}}{X_{L2}} + \frac{j R^3 X_{L2} + R^2 X_{L2}^2}{R^2 X_{L2} + X_{L2}^3} \right) \\
&= \frac{R X_{L2}^3}{R^2 X_{L2} + X_{L2}^3} + \frac{R X_{L1}}{X_{L2}} + \frac{X_C R}{X_{L2}} - \frac{R^2 X_{L2}^2}{R^2 X_{L2} + X_{L2}^3} - j \frac{R^2 X_{L2}^2}{R^2 X_{L2} + X_{L2}^3} + \frac{X_{L1} X_{L2}}{X_{L2}} + \frac{X_C X_{L2}}{X_C} \\
&= \frac{R X_{L2}^3 - R^2 X_{L2}^2}{R^2 X_{L2} + X_{L2}^3} + \frac{R(X_{L1} - X_C)}{X_{L2}} \quad , \quad R_C = 0 \text{ wg } 90^\circ \\
\Rightarrow & \frac{R X_{L2}^3 - R^2 X_{L2}^2}{R^2 X_{L2} + X_{L2}^3} + \frac{R(X_{L1} - X_C)(R^2 + X_{L2}^2)}{R^2 X_{L2} + X_{L2}^3} \\
&= \frac{R X_{L2}^3 - R^2 X_{L2}^2 + R(X_{L1} R^2 + X_{L1} X_{L2}^2 - X_C R^2 - X_C X_{L2}^2)}{R^2 X_{L2} + X_{L2}^3} \\
&= R X_{L2}^2 - R^2 X_{L2}^2 + R^3 X_{L1} + R X_{L1} X_{L2}^2 - R^3 X_C + R X_C X_{L2}^2
\end{aligned}$$

Aufg.3)



a) Zwischen der Gesamtspannung \underline{U} und dem Strom \underline{I}_2 soll eine Phasenverschiebung von 90° bestehen. Berechnen Sie allgemein die Größe des kap. Widerstandes X_C .

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}_2} = ?$$

$$\underline{I}_2 \text{ aus Stromteilerregel: } \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot \frac{jX_{L_2}}{R + jX_{L_2}}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{jX_{L_1} - jX_C + \frac{R \cdot jX_{L_2}}{R + jX_{L_2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}} = \frac{1}{jX_{L_1} - jX_C + \frac{R \cdot jX_{L_2}}{R + jX_{L_2}}} \cdot \frac{jX_{L_2}}{R + jX_{L_2}}$$

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}} = \frac{R + jX_{L_2}}{j(X_{L_1} - X_C) \cdot (R + jX_{L_2}) + jRX_{L_2}} \cdot \frac{jX_{L_2}}{R + jX_{L_2}}$$

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}} = \frac{jX_{L_2}}{jX_{L_1}R - X_{L_1}X_{L_2} - jX_C R + X_{L_2}X_C + jRX_{L_2}}$$

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}_2} = \frac{X_C X_{L_2} - X_{L_1} X_{L_2} + j(X_{L_1} R - X_C R + X_{L_2} R)}{jX_{L_2}}$$

=> konjugiert komplex erweitern

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}_2} = \frac{[X_C X_{L_2} - X_{L_1} X_{L_2} + j(X_{L_1} R - X_C R + X_{L_2} R)] \cdot (-jX_{L_2})}{X_{L_2}^2}$$

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}_2} = \frac{-j(X_C X_{L_2} - X_{L_1} X_{L_2}) + (X_{L_1} R + X_C R + X_{L_2} R)}{X_{L_2}}$$

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}_2} = \frac{R(X_{L_1} - X_C + X_{L_2}) - j(X_C X_{L_2} - X_{L_1} X_{L_2})}{X_{L_2}}$$

$$\varphi = 90^\circ \Rightarrow \text{Realteil} = 0$$

$$\frac{R(X_{L_1} - X_C + X_{L_2})}{X_{L_2}} = 0$$

$$X_{L_1} - X_C + X_{L_2} = 0$$

$$X_C = X_{L_1} + X_{L_2}$$

=====

b) Berechnen Sie bei Annahme dieses Sonderfalls die Ströme $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ und die Spannungen $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$ für die Werte:

$$X_{L_1} = 30\Omega$$

$$X_{L_2} = 20\Omega$$

$$R = 40\Omega$$

$$\underline{U} = 100V \cdot e^{j0^\circ}$$

$$\frac{U}{I_2} = j(X_{L_1} - X_C) = j(X_{L_1} - X_{L_1} - X_{L_2}) = -jX_{L_2}$$

$$I_2 = \frac{U}{-jX_{L_2}} = j \cdot \frac{U}{X_{L_2}} = e^{j90^\circ} \cdot \frac{100V \cdot e^{j0^\circ}}{20\Omega} = 5A \cdot e^{j90^\circ} = j5A$$

$$U_3 = R \cdot I_2 = 40\Omega \cdot 5A \cdot e^{j90^\circ} = 200V \cdot e^{j90^\circ} = j200V$$

$$I_3 = \frac{U_3}{jX_{L_2}} = \frac{200V \cdot e^{j90^\circ}}{20\Omega \cdot e^{j90^\circ}} = 10A \cdot e^{j0^\circ} = 10A$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = j5A + 10A = 10A + j5A = 11.18A \cdot e^{j26.56^\circ}$$

$$U_1 = I_1 \cdot jX_{L_1} = 11.18A \cdot e^{j26.56^\circ} \cdot 30\Omega \cdot e^{j90^\circ} = 335.4V \cdot e^{j116.57^\circ} = -150V + j300V$$

$$U_2 = I_1 \cdot (-jX_C) = 11.18A \cdot e^{j26.57^\circ} \cdot 50\Omega \cdot e^{-j90^\circ} = 559V \cdot e^{-j63.43^\circ} = 250V - j500V$$

=> Probe: Maschenumlauf

$$\sum U = 0:$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = 100V \cdot e^{j0^\circ}$$

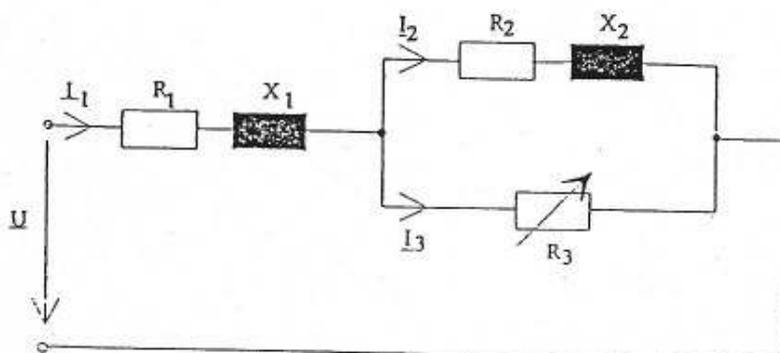
$$U = -150V + j300V + 250V - j500V + j200V$$

$$U = 100V = 100V \cdot e^{j0^\circ}$$

=> richtig gerechnet

=> Probe gibt in der Klausur oft Sonderpunkte!

Aufg. 5)



gegeben: R_1, X_1, R_2, X_2

Zwischen der Eingangsspannung \underline{U} und dem Strom \underline{I}_2 soll eine Phasenverschiebung von 90° bestehen. Berechnen Sie den Widerstand R_3 für diesen bestimmten Betriebszustand.

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}_2} = ?$$

Stromteilerregel:
$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{R_3}{R_2 + R_3 + jX_2}$$

$$I_2 = I_1 \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3 + jX_2}$$

$$I_1 = \frac{U}{Z_s} = \frac{U}{R_1 + jX_1 + \frac{(R_2 + jX_2) \cdot R_3}{R_2 + R_3 + jX_2}}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_1 + jX_1 + \frac{R_2 R_3 + jX_2 R_3}{R_2 + R_3 + jX_2}} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3 + jX_2}$$

$$\frac{I_2}{U} = \frac{R_2 + R_3 + jX_2}{(R_1 + jX_1) \cdot (R_2 + R_3 + jX_2) + R_2 R_3 + jX_2 R_3} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3 + jX_2}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + jX_2 R_1 + jX_1 R_2 + jX_1 R_3 - X_1 X_2 + R_2 R_3 + jX_2 R_3}{R_3}$$

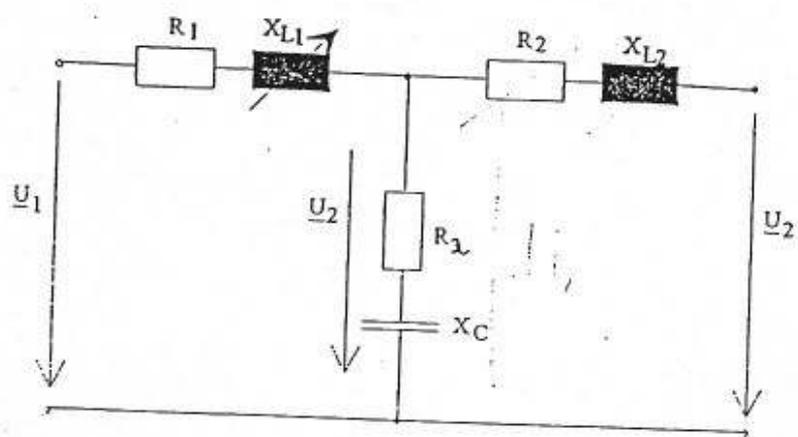
$$\varphi = 90^\circ \Rightarrow \text{Realteil} = 0$$

$$\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 - X_1 X_2 + R_2 R_3}{R_3} = 0$$

$$R_3 = \frac{X_1 X_2 - R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

=====

Aufg. 4)

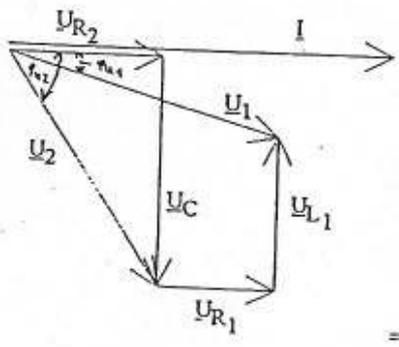


gegeben: R_1, R_2, X_C

Zwischen der Eingangsspannung \underline{U}_1 und der Ausgangsspannung \underline{U}_2 soll eine Phasenverschiebung von 45° bestehen.

a) Berechnen Sie den induktiven Widerstand X_L für diesen besonderen Betriebsfall.

=> Vorüberlegung: Kann φ auch negativ werden? => also $\varphi = -45^\circ$?



=> φ kann negativ werden, da

$$\varphi = \varphi_{u_2} - \varphi_{u_1}$$

deshalb: $\operatorname{Re}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)$

=> φ kann positiv werden, da

$$\varphi = \varphi_{u_1} - \varphi_{u_2}$$

$$\text{deshalb: } \operatorname{Re}\left(\frac{U_1}{U_2}\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{U_1}{U_2}\right)$$

$\Rightarrow X_{L_1}$ und R_2 werden nicht vom Strom durchflossen (Leerlauf); deshalb fallen an ihnen auch keine Spannungen ab.

Spannungsteilerregel:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2 - jX_C}{R_1 + R_2 + j(X_{L_1} - X_C)} \Rightarrow \text{konjugiert komplex erweitern}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{(R_2 - jX_C) \cdot [(R_1 + R_2) - j(X_{L_1} - X_C)]}{(R_1 + R_2)^2 + (X_{L_1} - X_C)^2}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{(R_2 - jX_C) \cdot (R_1 + R_2) - j(R_2 - jX_C) \cdot (X_{L_1} - X_C)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_{L_1} - X_C)^2}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_1 R_2 + R_2^2 - jX_C R_1 - jX_C R_2 - jR_2 X_{L_1} + jR_2 X_C - X_C X_{L_1} + X_C^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_{L_1} - X_C)^2}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_1 R_2 + R_2^2 - X_C X_{L_1} + X_C^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_{L_1} - X_C)^2} + j \cdot \frac{R_2 X_C - R_1 X_C - R_2 X_C - R_2 X_{L_1}}{(R_1 + R_2)^2 + (X_{L_1} - X_C)^2}$$

\Rightarrow bei $\varphi = -45^\circ$ muß Realteil = -Imaginärteil gesetzt werden.

$$R_1 R_2 + R_2^2 - X_C X_{L_1} + X_C^2 = -(-X_C R_1 - R_2 X_{L_1})$$

$$R_1 R_2 + R_2^2 - X_C R_1 + X_C^2 = X_C X_{L_1} + R_2 X_{L_1}$$

$$X_{L_1} = \frac{R_1 R_2 + R_2^2 - R_1 X_C + X_C^2}{X_C + R_2}$$

=====

b) Berechnen Sie die Spannung \underline{U}_2 für die Werte:

$$R_1 = X_C$$

$$\underline{U}_1 = 100V$$

$$X_{L_1} = \frac{R_2 X_C + R_2^2 - X_C^2 + X_C^2}{X_C + R_2} = \frac{R_2(X_C + R_2)}{X_C + R_2} = R_2$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cdot \frac{R_2 - jX_C}{R_1 + R_2 + j(X_{L_1} - X_C)}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cdot \frac{R_2 - jR_1}{R_1 + R_2 + j(R_2 - R_1)}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cdot \frac{R_2 - jR_1}{R_1 + R_2 + j(R_2 - R_1)} \cdot \frac{R_1 + R_2 - j(R_2 - R_1)}{R_1 + R_2 - j(R_2 - R_1)}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cdot \frac{(R_2 - jR_1)(R_1 + R_2) - j(R_2 - jR_1)(R_2 - R_1)}{(R_1 + R_2)^2 + (R_2 - R_1)^2}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cdot \frac{R_1 R_2 + R_2^2 - jR_1^2 - jR_1 R_2 - jR_2^2 + jR_1 R_2 + R_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (R_2 - R_1)^2}$$

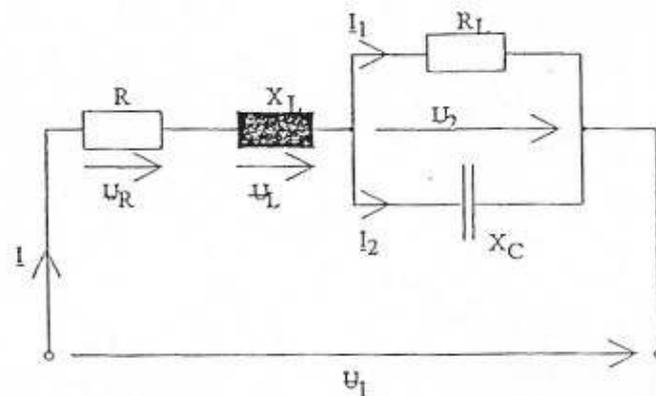
$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cdot \frac{R_1^2 + R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + (R_2 - R_1)^2} - j \cdot \frac{R_1^2 + R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + (R_2 - R_1)^2}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cdot \frac{R_1^2 + R_2^2}{2R_1^2 + 2R_2^2} - j \cdot \frac{R_1^2 + R_2^2}{2R_1^2 + 2R_2^2}$$

$$\underline{U}_2 = 100V \cdot \left(\frac{1}{2} - j \frac{1}{2} \right) = 50V - j50V = 70.71V \cdot e^{-j45^\circ}$$

=====

Aufg. 1):



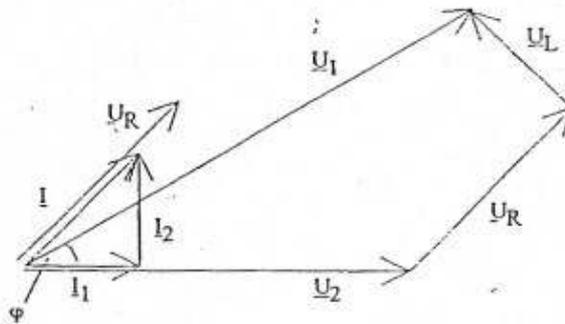
gegeben: R, X_L, X_C, U_1

a) Bei welchem Widerstand R_L eilt die Spannung \underline{U}_2 der Spannung \underline{U}_1 um 45° nach?

=> Achtung: Vorzeichen beachten!

$$\underline{U}_2 = U_2 \cdot e^{-j45^\circ} \quad \text{bezogen auf } \underline{U}_1 \Rightarrow \underline{U}_1 = U_1 \cdot e^{j0^\circ}$$

Zeigerbild:



$$\varphi = -45^\circ$$

$$\varphi = \varphi_{U_2} - \varphi_{U_1}$$

Spannungsteilerregel:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R_L \parallel -jX_C}{R + jX_L + (R_L \parallel -jX_C)} = \frac{R_L \cdot (-jX_C)}{R_L - jX_C} \cdot \frac{1}{R + jX_L + \left(\frac{R_L \cdot (-jX_C)}{R_L - jX_C} \right)}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{-jR_L X_C}{R_L - jX_C}}{(R + jX_L) \cdot (R_L - jX_C) - jR_L X_C} = \frac{-jR_L X_C}{RR_L + jR_L X_L + X_L X_C - jR_L X_C - jRX_C}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-jR_L X_C}{RR_L + X_L X_C + j(R_L X_L - RX_C - R_L X_C)}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-jR_L X_C}{RR_L + X_L X_C + j(R_L X_L - RX_C - R_L X_C)} \cdot \frac{RR_L + X_L X_C - j(R_L X_L - RX_C - R_L X_C)}{RR_L + X_L X_C - j(R_L X_L - RX_C - R_L X_C)}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-jR_L^2 RX_C - jR_L X_L X_C^2 - R_L^2 X_C X_L + RR_L X_C^2 + R_L^2 X_C^2}{(RR_L + X_L X_C)^2 + (R_L X_L - RX_C - R_L X_C)^2}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-R_L^2 X_C X_L + RR_L X_C^2 + R_L^2 X_C^2}{(RR_L + X_L X_C)^2 + (R_L X_L - RX_C - R_L X_C)^2} - j \frac{RR_L^2 X_C + R_L X_L X_C^2}{(RR_L + X_L X_C)^2 + (R_L X_L - RX_C - R_L X_C)^2}$$

$\varphi = -45^\circ$ Aufgabenstellung

$$\tan(-45^\circ) = -1$$

$$\varphi = \arctan(\text{Im}/\text{Re})$$

$$\text{Realteil}(\text{Re}) = -\text{Imaginärteil}(\text{Im})$$

$$-R_L^2 X_C X_L + RR_L X_C^2 + R_L^2 X_C^2 = RR_L^2 X_C + R_L X_L X_C^2$$

$$R_L X_C (-R_L X_L + RX_C + R_L X_C) = R_L X_C (RR_L + X_L X_C)$$

$$R_L (-X_L - R + X_C) = -RX_C + X_L X_C$$

$$R_L = \frac{RX_C - X_L X_C}{X_L + R - X_C}$$

=====

b) Berechnen Sie die Spannung \underline{U}_2 für die Werte:

$$R = 30\Omega; X_L = 10\Omega; X_C = 20\Omega;$$

$$\underline{U}_1 = 100V \cdot e^{j0^\circ}$$

$$R_L = \frac{RX_C - X_L X_C}{X_L + R - X_C} = \frac{30\Omega \cdot 20\Omega - 10\Omega \cdot 20\Omega}{10\Omega + 30\Omega - 20\Omega} = 20\Omega$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cdot \frac{-R_L^2 X_C X_L + RR_L X_C^2 + R_L^2 X_C^2}{(RR_L + X_L X_C)^2 + (R_L X_L - RX_C - R_L X_C)^2} - j \cdot \frac{RR_L^2 X_C + R_L X_L X_C}{(RR_L + X_L X_C)^2 + (R_L X_L - RX_C - R_L X_C)^2}$$

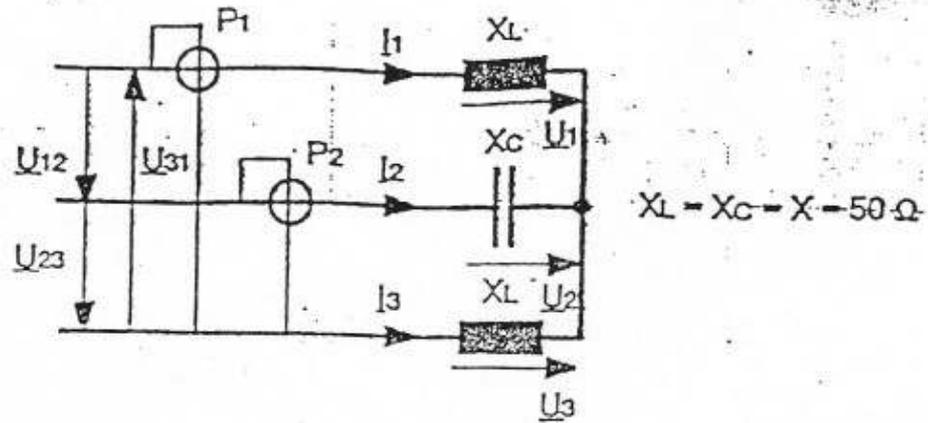
=> Werte einsetzen

$$\underline{U}_2 = 100V \cdot e^{j0^\circ} \cdot (0,25 - j0,25) = 100V \cdot e^{j0^\circ} \cdot 0,354 \cdot e^{-j45^\circ}$$

$$\underline{U}_2 = 35,4V \cdot e^{-j45^\circ}$$

=====

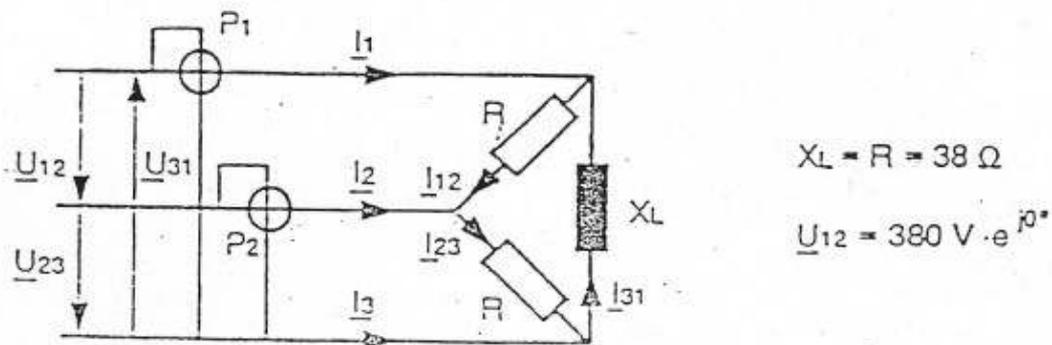
1)



Gegeben ist ein symmetrisches Dreiphasennetz mit $U_{12} = U_{23} = U_{31} = 100 \text{ V}$ $\underline{U}_{12} = 100 \text{ V} e^{j0^\circ}$

- Berechnen Sie die Ströme I_1 , I_2 und I_3 (kartesische und Exponentialform)
- Wie lauten die Zeitfunktionen der Leiterströme $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$
- Berechnen Sie die Spannungen \underline{U}_1 , \underline{U}_2 und \underline{U}_3 (kartesische und Exponentialform)
- Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm aller Spannungen und Ströme.
- Welche Leistungen zeigen die beiden Wattmeter an?

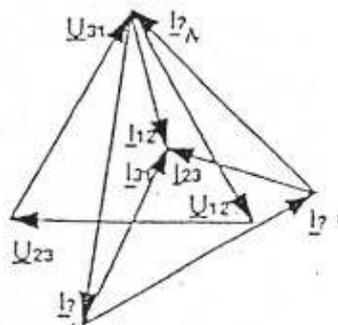
2)



$$X_L = R = 38 \Omega$$

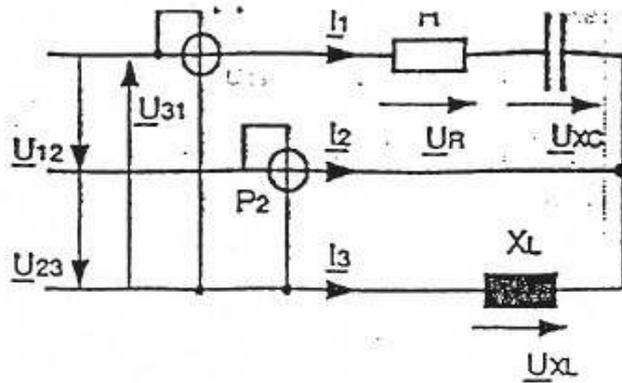
$$\underline{U}_{12} = 380 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ}$$

- Das System der Versorgungsspannungen sei starr und symmetrisch.
- Berechnen Sie die Strangströme I_{12} , I_{23} und I_{31} in exponentieller und in kartesischer Form.
- Berechnen Sie die Leiterströme I_1 , I_2 und I_3 (kartesische und Exponentialform) und bestimmen Sie die zugehörigen Zeitfunktionen $i_1(t)$, $i_2(t)$ und $i_3(t)$.
- Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm aller Spannungen und Ströme entsprechend folgendem Beispiel:



- Welche Leistungen zeigen die Wattmeter an?

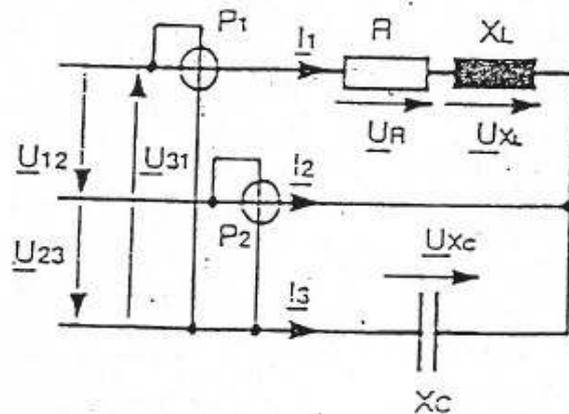
3)



Gegeben ist ein symmetrisches Dreiphasennetz mit $U_{12} = U_{23} = U_{31} = 380 \text{ V}$ und der Belastung $R = X_L = X_C = 10 \Omega$.

- Berechnen Sie die Ströme I_1 , I_2 und I_3 (bezogen auf $\underline{U}_{12} = U_{12} e^{j0^\circ}$).
- Wie lauten die Zeitfunktionen $i_1(t)$, $i_2(t)$ und $i_3(t)$ der Leiterströme?
- Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm der Spannungen und Ströme.
- Welche Leistungen zeigen die Wirkleistungsmesser an?

4)



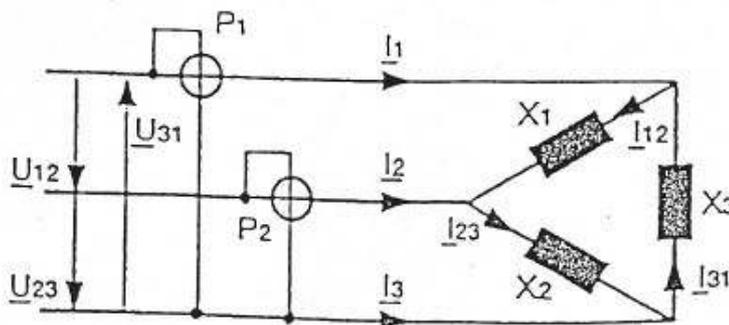
$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = 380 \text{ V}$$

$$R = X_L = X_C = 10 \Omega$$

Gegeben sei ein symmetrisches Dreiphasennetz mit $U_{12} = U_{12} \cdot e^{j0^\circ}$.

- Berechnen Sie die Ströme I_1 , I_2 und I_3 sowie die Spannungen U_R , U_{X_L} und U_{X_C} (kartesische und Exponentialform).
- Zeichnen Sie ein maßstabsgerechtes Zeigerdiagramm aller Spannungen und Ströme.
- Welche Leistungen P_1 und P_2 werden angezeigt?

5)



$$X_1 = 22 \Omega$$

$$X_2 = 44 \Omega$$

$$X_3 = 66 \Omega$$

$$\underline{U}_{12} = 220 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ}$$

- Berechnen Sie die Strangströme I_{12} , I_{23} , I_{31} und die Leiterströme I_1 , I_2 und I_3 .

~~b) Zeichnen Sie das maßstabgerechte Zeigerdiagramm der Netzspannungen und aller Ströme.~~

~~c) Welche Leistungen zeigen die Wattmeter an?~~

1) Drehstromsystem

- Sternschaltung \Rightarrow 2 Maschenumläufe und Knotenpunktsatz
- Dreieckschaltung \Rightarrow 3 Maschenumläufe

Normalerweise sind die zu berechnenden Ströme durch Umstellen der 3 Gleichungen zu ermitteln. In seltenen Fällen muß aber auf Determinanten zurückgegriffen werden (Beispiel siehe Aufgabe 1).

Weiterhin ist bei den Maschenumläufen zu beachten, daß die Stromrichtungen richtig in die Gleichungen eingetragen werden (pos. und neg. Vorzeichen). Es sind auch die Vorzeichen der Bauelemente einzubeziehen.

- Widerstand R
- Induktivität jX_L
- Kapazität $-jX_C$

2) Darstellungsform komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen werden in der Elektrotechnik in der kartesischen Form ($z = a + jb$) und in der Exponentialform ($z = r * e^{j\varphi}$) dargestellt.

-Umrechnung Exponentialform in kartesischen Form

$$z = r * e^{j\varphi} \Rightarrow z = a + jb$$

mit: $a = r * \cos \varphi$ und $b = r * \sin \varphi$

Umrechnungshinweis: $j^0 = 1$ $j^1 = j$ $j^2 = -1$ $j^{-1} = \frac{1}{j} = -j$ $j^{-2} = \frac{1}{j^2} = -1$

-Umrechnung kartesischen Form in Exponentialform

$$z = a + jb \Rightarrow z = r * e^{j\varphi}$$

mit: $r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ und $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$ j^{90°

Umrechnungshinweis: $\frac{1}{e^{j\varphi}} = e^{-j\varphi}$ $j = e^{j90^\circ}$

-Zum Addieren und Subtrahieren von komplexen Zahlen eignet sich am besten die kartesische Form:

$$z_1 = a + jb \quad z_2 = c + jd$$

-Zum Multiplizieren und Dividieren von komplexen Zahlen eignet sich am besten die Exponentialform:

$$Z_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} \quad Z_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$$

$$Z_{\text{ges}} = Z_1 \cdot Z_2 = (r_1 \cdot e^{j\varphi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{j\varphi_2}) = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{-j\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 + (-\varphi_2))}$$

3) Leistungsmesser

Bei der Aronschaltung, die in den Aufgaben fast immer verwendet wird, ist darauf zu achten daß, Spannung $\underline{U}_{13} = -\underline{U}_{31}$ ist. Dies bedeutet daß, 180° addiert oder subtrahiert werden müssen.

$$\underline{U}_{13} = -\underline{U}_{31} = -U_{31} e^{j120^\circ} = U_{31} e^{j(120^\circ - 180^\circ)} = U_{31} e^{j(120^\circ + 180^\circ)} = U_{31} e^{-j60^\circ}$$

1.)a)

$$\begin{array}{lll}
 \underline{U}_{12} = 100V * e^{j0^\circ} & \text{Masche I} & \underline{U}_{12} = I_1 * jX + I_2 * jX & \frac{\underline{U}_{12}}{jX} = I_1 + I_2 \\
 \underline{U}_{23} = 100V * e^{-j120^\circ} & \text{Masche II} & \underline{U}_{23} = -I_2 * jX - I_3 * jX & \text{oder } \frac{\underline{U}_{23}}{jX} = -I_2 - I_3 \\
 \underline{U}_{31} = 100V * e^{j120^\circ} & \text{Knotenpunkt} & 0 = I_1 + I_2 + I_3 & 0 = I_1 + I_2 + I_3 \\
 X_L = X_C = X = 50\Omega & & &
 \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} jX & jX & 0 \\ 0 & -jX & -jX \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 = XX + XX - XX = X^2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \underline{U}_{12} & jX & 0 \\ \underline{U}_{23} & -jX & -jX \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 = -\underline{U}_{12} jX + \underline{U}_{12} jX - \underline{U}_{23} jX = -\underline{U}_{23} jX$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\underline{U}_{12}}{jX} & 1 & 0 \\ \frac{\underline{U}_{23}}{jX} & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = j \frac{\underline{U}_{23}}{X}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} jX & \underline{U}_{12} & 0 \\ 0 & \underline{U}_{23} & -jX \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 = \underline{U}_{23} jX - \underline{U}_{12} jX$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\underline{U}_{12}}{jX} & 0 \\ 0 & \frac{\underline{U}_{23}}{jX} & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\underline{U}_{23}}{jX} - \frac{\underline{U}_{12}}{jX}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} jX & jX & \underline{U}_{12} \\ 0 & -jX & \underline{U}_{23} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{\underline{U}_{12}}{jX} \\ 0 & -1 & \frac{\underline{U}_{23}}{jX} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\underline{U}_{23}}{jX} = -j \frac{\underline{U}_{23}}{X}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-\underline{U}_{23} j}{X} = \frac{-100 \text{ V } e^{-j120^\circ} e^{j90^\circ}}{50 \Omega} = -2 \text{ A } e^{-j30^\circ} = 2 \text{ A } e^{-j210^\circ} = 2 \text{ A } e^{j150^\circ} = -1,73 \text{ A} + j1 \text{ A}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{\underline{U}_{23} - \underline{U}_{12}}{-jX} = \frac{100 \text{ V } e^{-j120^\circ} e^{j90^\circ} - 100 \text{ V } e^{j0^\circ} e^{j90^\circ}}{50 \Omega} \\ &= 2 \text{ A } e^{-j30^\circ} - 2 \text{ A } e^{j90^\circ} = 1,73 \text{ A} - j1 \text{ A} - j2 \text{ A} = 1,73 \text{ A} - j3 \text{ A} = 3,46 \text{ A } e^{-j60^\circ} \end{aligned}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{\underline{U}_{12} j}{X} = \frac{100 \text{ V } e^{j0^\circ} e^{j90^\circ}}{50 \Omega} = 2 \text{ A } e^{j90^\circ} = j2 \text{ A}$$

b)

$$i_{1(t)} = 1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$$

dabei werden I und φ aus der

Exponentialdarstellung entnommen

$$i_{1(t)} = 2 \text{ A } \sqrt{2} \sin(\omega t + 150^\circ) = 2,83 \text{ A } \sin(\omega t + 150^\circ)$$

$$i_{2(t)} = 3,46 \text{ A } \sqrt{2} \sin(\omega t - 60^\circ) = 4,89 \text{ A } \sin(\omega t - 60^\circ)$$

$$i_{3(t)} = 2 \text{ A } \sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) = 2,83 \text{ A } \sin(\omega t + 90^\circ)$$

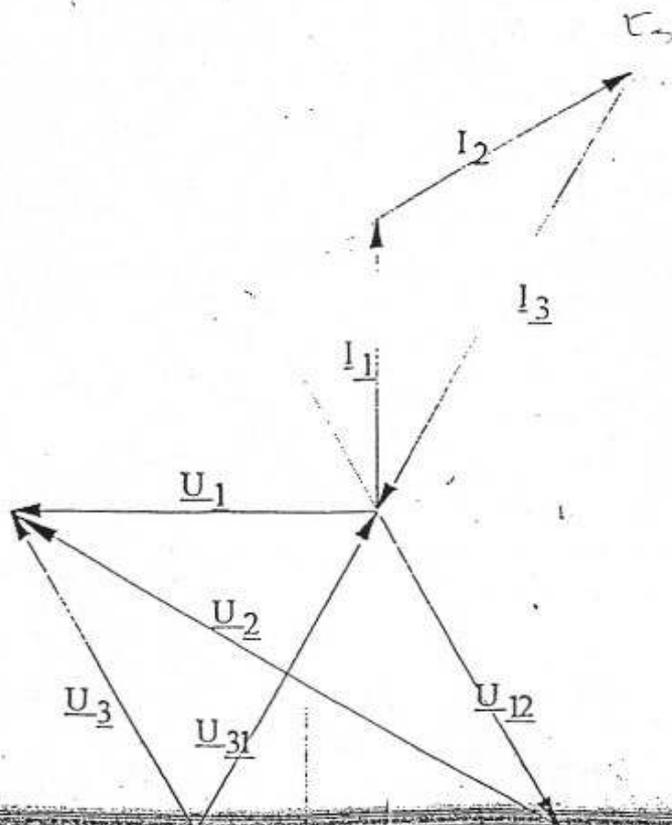
c)

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 * jX = 2 \text{ A } e^{j150^\circ} * 50 \Omega e^{j90^\circ} = 100 \text{ V } e^{j240^\circ} = 100 \text{ V } e^{-j120^\circ} = -50 \text{ V} - j86,6 \text{ V}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 * (-jX) = 3,46 \text{ A } e^{-j60^\circ} * 50 \Omega e^{-j90^\circ} = 173 \text{ V } e^{-j150^\circ} = -150 \text{ V} - j86,6 \text{ V}$$

$$\underline{U}_3 = \underline{I}_3 * jX = 2 \text{ A } e^{j90^\circ} * 50 \Omega e^{j90^\circ} = 100 \text{ V } e^{j180^\circ} = -100 \text{ V}$$

d)





c)

$$\begin{aligned}P_1 &= U_{13} \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi_{U_{13}} - \varphi_{I_1}) \\&= 100V \cdot 2A \cdot \cos(-60^\circ - 150^\circ) \\&= 100V \cdot 2A \cdot \cos(-210^\circ) \\&= -173,2W\end{aligned}$$

$$\varphi_{U_{13}} = \varphi_{U_{31}} - 180^\circ = 120^\circ - 180^\circ = 60^\circ$$

$$\begin{aligned}P_2 &= U_{23} \cdot I_2 \cdot \cos(\varphi_{U_{23}} - \varphi_{I_2}) \\&= 100V \cdot 3,46A \cdot \cos(-120^\circ + 60^\circ) \\&= 100V \cdot 3,46A \cdot \cos(-60^\circ) \\&= 173,2W\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{\text{ges}} &= P_1 + P_2 = -173,2W + 173,2W \\P_{\text{ges}} &= 0W\end{aligned}$$

Die Gesamtleistung ist gleich Null,
weil in Induktivitäten und Kapazitäten keine Wirkleistung umgesetzt wird.

2.)a)

$$\underline{U}_{12} = 380V \cdot e^{j0^\circ}$$

$$\underline{U}_{23} = 380V \cdot e^{-j120^\circ}$$

$$\underline{U}_{31} = 380V \cdot e^{j120^\circ}$$

$$\underline{U}_{12} = \underline{I}_{12} \cdot R \Rightarrow \underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{R} = \frac{380V e^{j0^\circ}}{38\Omega} = 10A e^{j0^\circ} = 10A + j0A$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{I}_{23} \cdot R \Rightarrow \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{R} = \frac{380V e^{-j120^\circ}}{38\Omega} = 10A e^{-j120^\circ} = -5A - j8,66A$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{I}_{31} \cdot jX_L \Rightarrow \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{jX_L} = \frac{380V e^{j120^\circ}}{j38\Omega} = \frac{380V \cdot e^{j120^\circ}}{38\Omega e^{j90^\circ}} = 10A e^{j(120^\circ - 90^\circ)} = 10A e^{j30^\circ} = 8,66A + j5A$$

b)

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = 10A - 8,66A - j5A = 1,34A - j5A = 5,18A e^{-j75^\circ}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = -5A - j8,66A - 10A = -15A - j8,66A = 17,32A e^{-j150^\circ}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = 8,66A + j5A + 5A + j8,66A = 13,66A + j13,66A = 19,32A e^{j45^\circ}$$

Kontrolle $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$

$$i_{1(t)} = I \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$$

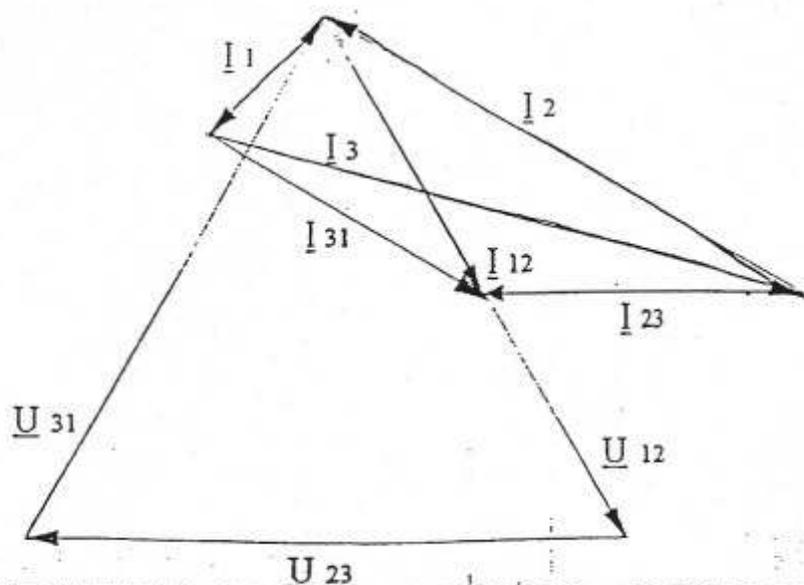
dabei werden I und φ aus der Exponentialdarstellung entnommen

$$i_{1(t)} = 5,18A \sqrt{2} \sin(\omega t - 75^\circ) = 7,32A \sin(\omega t - 75^\circ)$$

$$i_{2(t)} = 17,32A \sqrt{2} \sin(\omega t - 150^\circ) = 24,49A \sin(\omega t - 150^\circ)$$

$$i_{3(t)} = 19,32A \sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) = 27,32A \sin(\omega t + 45^\circ)$$

c)



d)

$$\begin{aligned}
 P_1 &= U_{13} \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi_{U_{13}} - \varphi_{I_1}) \\
 &= 380V \cdot 5,18A \cdot \cos(-60^\circ - [-75^\circ]) \\
 &= 380V \cdot 5,18A \cdot \cos(15^\circ) \\
 &= 1,9KW
 \end{aligned}$$

$$\varphi_{U_{13}} = \varphi_{U_{31}} - 180^\circ = 120^\circ - 180^\circ = -60^\circ$$

$$\begin{aligned}
 P_2 &= U_{23} \cdot I_2 \cdot \cos(\varphi_{U_{23}} - \varphi_{I_2}) \\
 &= 380V \cdot 17,32A \cdot \cos(-120^\circ - [-150^\circ]) \\
 &= 380V \cdot 17,32A \cdot \cos(30^\circ) \\
 &= 5,7KW
 \end{aligned}$$

$$P_{ges} = P_1 + P_2 = 1,9KW + 5,7KW = 7,6KW$$

$$P_{ges} = R(I_{12}^2 + I_{23}^2) = 38\Omega(10^2A^2 + 10^2A^2) = 7,6KW$$

3.)a)

$$\underline{U}_{12} = 380 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ}$$

$$\underline{U}_{23} = 380 \text{ V} \cdot e^{-j120^\circ}$$

$$\underline{U}_{31} = 380 \text{ V} \cdot e^{j120^\circ}$$

Masche I $\underline{U}_{12} = \underline{I}_1 \cdot R - \underline{I}_1 \cdot jX_C \quad R = X_L = X_C = 10 \Omega$

Masche II $\underline{U}_{23} = -\underline{I}_3 \cdot jX_L$

Knotenpunkt $0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$

$$\underline{I}_1 (R - jX_C) = \underline{U}_{12} \Rightarrow \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{12}}{R - jX_C} = \frac{380 \text{ V} e^{j0^\circ}}{(10 - j10) \Omega} = \frac{380 \text{ V}}{14,14 e^{-j45^\circ} \Omega} = 26,87 \text{ A} e^{j45^\circ} = 19 \text{ A} + j19 \text{ A}$$

$$-\underline{I}_3 \cdot jX_L = \underline{U}_{23} \Rightarrow \underline{I}_3 = -\frac{\underline{U}_{23}}{jX_L} = \frac{-380 \text{ V} e^{-j120^\circ}}{j10 \Omega} = \frac{380 \text{ V} e^{j60^\circ}}{10 \Omega e^{j90^\circ}} = 38 \text{ A} e^{-j30^\circ} = 32,9 \text{ A} - j19 \text{ A}$$

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \Rightarrow \underline{I}_2 = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_3) = -(19 \text{ A} + j19 \text{ A} + 32,9 \text{ A} - j19 \text{ A} - j19 \text{ A}) = -51,9 \text{ A} - j0 = -51,9 \text{ A} e^{j0^\circ} = 51,9 \text{ A} e^{j180^\circ}$$

b)

$$i_{(t)} = I \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$$

dabei werden I und φ aus der Exponentialdarstellung entnommen

$$i_{1(t)} = 26,87 \text{ A} \sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) = 38 \text{ A} \sin(\omega t + 45^\circ)$$

$$i_{2(t)} = -51,9 \text{ A} \sqrt{2} \sin(\omega t) = 51,9 \text{ A} \sqrt{2} \sin(\omega t + 180^\circ) = 73,4 \text{ A} \sin(\omega t + 180^\circ)$$

$$i_{3(t)} = 38 \text{ A} \sqrt{2} \sin(\omega t - 30^\circ) = 53,74 \text{ A} \sin(\omega t - 30^\circ)$$

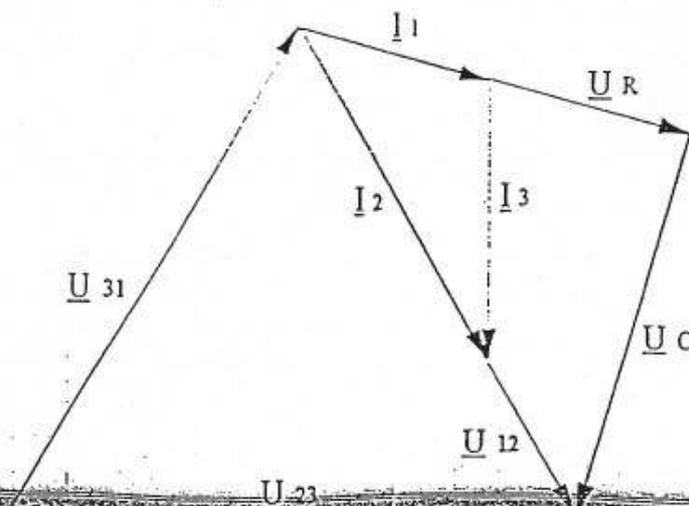
c) Verbraucherstrangspannungen: $\underline{U}_{1V} = \underline{U}_{12}$; $\underline{U}_{2V} = 0$; $\underline{U}_{3V} = -\underline{U}_{23}$

$$\underline{U}_R = \underline{I}_1 \cdot R = 26,87 \text{ A} e^{j45^\circ} \cdot 10 \Omega = 268,7 \text{ V} e^{j45^\circ}$$

$$\underline{U}_C = \underline{I}_1 \cdot (-jX_C) = 26,87 \text{ A} e^{j45^\circ} \cdot 10 \Omega e^{-j90^\circ} = 268,7 \text{ V} e^{-j45^\circ}$$

$$\underline{U}_L = \underline{I}_3 \cdot jX_L = -\underline{U}_{23} = \underline{U}_{23} e^{-j180^\circ} = 380 \text{ V} e^{j(-120^\circ + 180^\circ)} = 380 \text{ V} e^{j60^\circ}$$

d)



Tutorium Nr. 1 E-Technik

1.) Gegeben ist eine zylinderförmige Hochspannungsdurchführung mit geschichtetem Dielektrikum:

Hierdurch soll ein besserer Verlauf der elektrischen Feldstärke im Dielektrikum erreicht werden. (siehe Diagramm)

Bereich 1: $\epsilon_{r1}: r_i \leq r \leq r_2$

Bereich 2: $\epsilon_{r2}: r_2 \leq r \leq r_a$

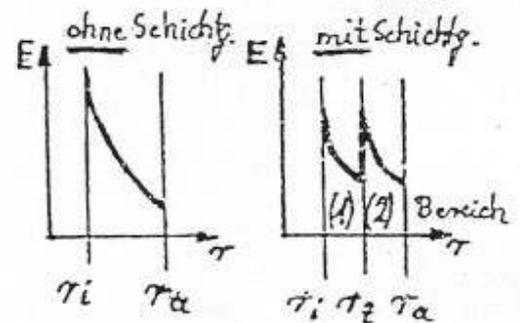
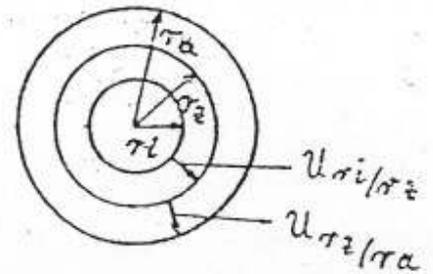
a) Berechne den Verlauf der Feldstärke E im Bereich (1) und im Bereich (2) in Abhängigkeit von der Gesamtspannung $U_{el/a}$, den Radien r und den Permesibilitäten ϵ_r . *Permittivitäten ϵ .*

b) Es soll sein: $E_1(r_1) = E_2(r_2)$ und: $r_2 = 2 * r_1$

Berechne das Verhältnis $\epsilon_{r1} / \epsilon_{r2}$!

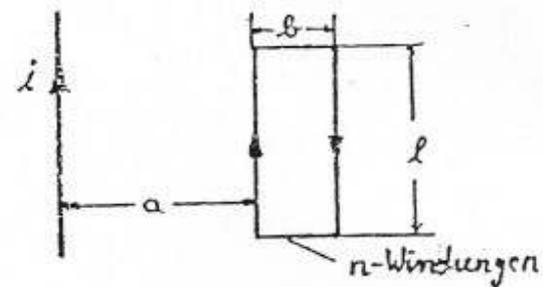
c) Weiterhin soll sein: $r_a = 3 * r_1$. Berechne das Verhältnis

der Spannungen $U_{el/a} / U_{el/r_a}$



2.) Parallel zu einer Stromleitung liegt im Abstand a eine Rechteckspule mit n Windungen. Der Einschaltstrom in der stromführenden Leitung verläuft nach dem

Zeitgesetz: $i = i_0 * (1 - e^{-t/\tau})$. Berechne nach Betrag und Richtung die in der Rechteckspule induzierte Spannung $u_i = u(t)$!

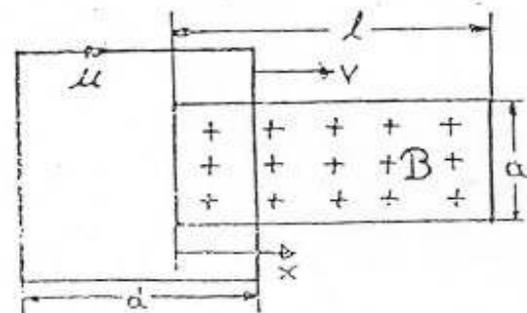


3.) Eine eindrahtige Leiterschleife wird mit der Geschwindigkeit $v = v_0 * (1 - e^{-t/\tau})$ in ein homogenes Magnetfeld hineingeführt. Die magn. Induktion B ist konstant.

a) Berechne die induzierte Spannung u_i nach

Betrag und Richtung $u = u(t)$.

b) Zeichne in qualitativer Form den Verlauf der Spannung $u = u(t)$.



d)

$$\begin{aligned} P_1 &= U_{13} \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi_{U_{13}} - \varphi_{I_1}) \\ &= 380V \cdot 26,87A \cdot \cos(-60^\circ - 45^\circ) \\ &= 380V \cdot 26,87A \cdot \cos(-105^\circ) \\ &= -2,64KW \end{aligned}$$

$$\varphi_{U_{13}} = \varphi_{U_{31}} - 180^\circ = 120^\circ - 180^\circ = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} P_2 &= U_{23} \cdot I_2 \cdot \cos(\varphi_{U_{23}} - \varphi_{I_2}) \\ &= 380V \cdot 51,9A \cdot \cos(-120^\circ - 180^\circ) \\ &= 380V \cdot 51,9A \cdot \cos(-300^\circ) \\ &= 9,86KW \end{aligned}$$

$$P_{ges} = P_1 + P_2 = -2,64KW + 9,86KW = 7,22KW$$

$$P_{ges} = U_R \cdot I_1 = 268,7V \cdot 26,87A = 7,22KW$$

oder:

$$P_{ges} = I_1^2 \cdot R = 7,22KW$$

4.)a)

$$\underline{U}_{12} = 380V \cdot e^{j0^\circ}$$

$$\underline{U}_{23} = 380V \cdot e^{-j120^\circ}$$

$$\underline{U}_{31} = 380V \cdot e^{j120^\circ}$$

Masche I $\underline{U}_{12} = \underline{I}_1 \cdot R + \underline{I}_1 \cdot jX_L$ $R = X_L = X_C = 10\Omega$

Masche II $\underline{U}_{23} = -\underline{I}_3 \cdot (-jX_C) = \underline{I}_3 \cdot jX_C$

Knotenpunkt $0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$

$$\underline{I}_1 (R + jX_L) = \underline{U}_{12} \Rightarrow \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{12}}{R + jX_L} = \frac{380V e^{j0^\circ}}{(10 + j10)\Omega} = \frac{380V}{14,14 e^{j45^\circ} \Omega}$$

$$= 26,87A e^{-j45^\circ} = 19A - j19A$$

$$\underline{I}_3 \cdot jX_C = \underline{U}_{23} \Rightarrow \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{23}}{jX_C} = \frac{380V e^{-j120^\circ}}{j10\Omega} = \frac{380V e^{-j120^\circ}}{10\Omega e^{j90^\circ}}$$

$$= 38A e^{-j210^\circ} = 38A e^{j150^\circ} = -32,9A + j19A$$

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \Rightarrow \underline{I}_2 = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_3) = -(19A - 32,9A + j19A - j19A)$$

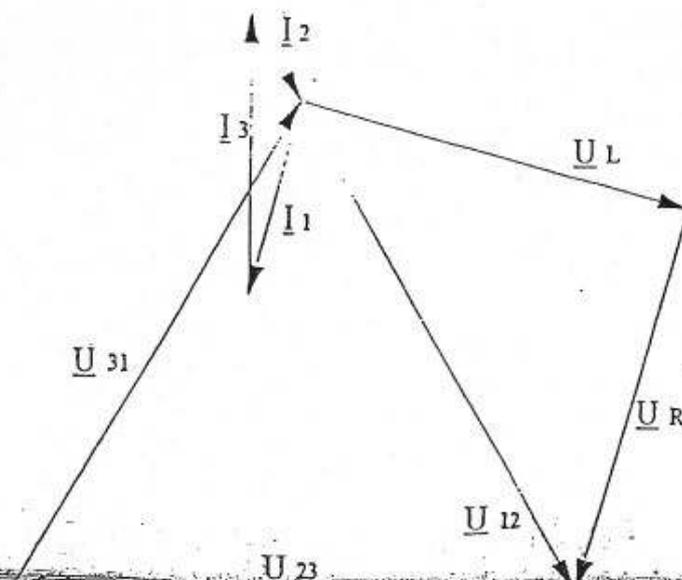
$$= 13,9 + j0 = 13,9A e^{j0^\circ}$$

$$\underline{U}_R = \underline{I}_1 \cdot R = 26,87A e^{-j45^\circ} \cdot 10\Omega = 268,7V e^{-j45^\circ} = 190V - j190V$$

$$\underline{U}_C = \underline{I}_3 \cdot (-jX_C) = 38A e^{j150^\circ} \cdot 10\Omega e^{-j90^\circ} = 380V e^{j60^\circ} = 190V - j329V = -\underline{U}_{23}$$

$$\underline{U}_L = \underline{I}_1 \cdot jX_L = 26,87A e^{-j45^\circ} \cdot 10\Omega e^{j90^\circ} = 268,7V e^{j45^\circ} = 268,7V e^{j45^\circ} = 190V + j190V$$

b)



d)

$$\begin{aligned} P_1 &= U_{13} \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi_{U_{13}} - \varphi_{I_1}) \\ &= 380V \cdot 26,87A \cdot \cos(-60^\circ - 45^\circ) \\ &= 380V \cdot 26,87A \cdot \cos(-105^\circ) \\ &= 9863W \end{aligned}$$

$$\varphi_{U_{13}} = \varphi_{U_{31}} - 180^\circ = 120^\circ - 180^\circ = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} P_2 &= U_{23} \cdot I_2 \cdot \cos(\varphi_{U_{23}} - \varphi_{I_2}) \\ &= 380V \cdot 13,9A \cdot \cos(-120^\circ + 0^\circ) \\ &= 380V \cdot 13,9A \cdot \cos(-120^\circ) \\ &= -2641W \end{aligned}$$

$$P_{ges} = P_1 + P_2 = 9863W - 2641W = 7220W$$

$$P_{ges} = R \cdot I_1^2 = 10\Omega \cdot 26,87^2 A^2 = 7220W$$

5.)a)

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= 220V * e^{j0^\circ} & X_1 &= 22\Omega \\ \underline{U}_{23} &= 220V * e^{-j120^\circ} & X_2 &= 44\Omega \\ \underline{U}_{31} &= 220V * e^{j120^\circ} & X_3 &= 66\Omega \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{12} = \underline{I}_{12} * jX_1 \Rightarrow \underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{jX_1} = \frac{220V e^{j0^\circ}}{j22\Omega} = \frac{220V e^{j0^\circ}}{22\Omega e^{j90^\circ}} = \frac{220V e^{-j90^\circ}}{22\Omega}$$

$$= 0A - j10A = 10A e^{-j90^\circ}$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{I}_{23} * jX_2 \Rightarrow \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{jX_2} = \frac{220V e^{-j120^\circ}}{j44\Omega} = \frac{220V e^{-j120^\circ}}{44\Omega e^{j90^\circ}} = \frac{220V e^{-j210^\circ}}{44\Omega}$$

$$= 5A e^{-j210^\circ} = 5A e^{j150^\circ} = -4,33A + j2,5A$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{I}_{31} * jX_3 \Rightarrow \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{jX_3} = \frac{220V e^{j120^\circ}}{j66\Omega} = \frac{220V e^{j120^\circ}}{66\Omega e^{j90^\circ}} = \frac{220V e^{j30^\circ}}{66\Omega}$$

$$= 3,33A e^{j30^\circ} = 2,88A + j1,66A$$

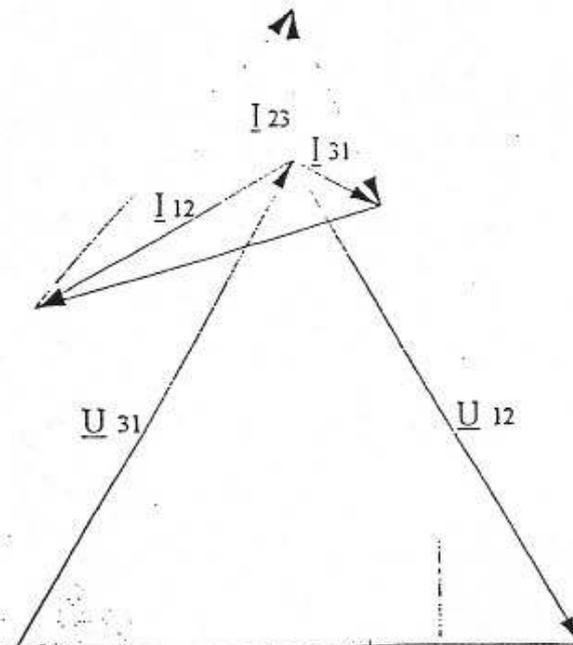
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = -j10A - 2,88A - j1,66A = -2,88A - j11,66A = 12A e^{-j103,9^\circ}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = -4,33A + j2,5A - j10A = -4,33A + j12,5A = 13,2A e^{j109,1^\circ}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = 2,88A + j1,66A + 4,33A - j2,5A = 7,21A - j0,84A = 7,26A e^{-j6,7^\circ}$$

Probe : $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$

b)



c)
$$P_1 = U_{13} \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi_{U_{13}} - \varphi_{I_1})$$

$$= 220V \cdot 12,01A \cdot \cos(-60^\circ + 103,87^\circ)$$

$$= 220V \cdot 12,01A \cdot \cos(43,87^\circ)$$

$$= 1,9 \text{ KW}$$

$$\varphi_{U_{13}} = \varphi_{U_{31}} - 180^\circ = 120^\circ - 180^\circ = -60^\circ$$

$$P_2 = U_{23} \cdot I_2 \cdot \cos(\varphi_{U_{23}} - \varphi_{I_2})$$

$$= 220V \cdot 13,23A \cdot \cos(-120^\circ - 109,11^\circ)$$

$$= 220V \cdot 13,23A \cdot \cos(-229,11^\circ)$$

$$= -1,9 \text{ KW}$$

$$P_{\text{ges}} = P_1 + P_2 = -1,9 \text{ KW} + 1,9 \text{ KW} = 0 \text{ KW}$$

$$P_{\text{ges}} = 0$$

Die Gesamtleistung ist gleich Null, weil in Induktivitäten keine Wirkleistung umgesetzt wird.